Oszillationsverhalten verschiedener Limiter nach Reflexion im Stoßrohr

Moritz Nadler*

8. März 2008

*E-Mail: moritz_nadler@gmx.de

Zusammenfassung

Diese Studienarbeit untersucht das Verhalten der numerischen Lösung der Euler-Gleichungen nach der Reflexion an einer harten Wand im Rahmen einer eindimensionalen Stoßrohrsimulation. Werden sogenannte „Slope averaging“ Methoden zur Lösung eingesetzt, treten nach der Reflexion Oszillationen auf, die in der exakten Lösung nicht vorhanden sind. Ihre Stärke hängt von der Wahl der Mittelungsfunktion bzw. des Limiters ab. Bei manchen Limitern verschwinden sie auch ganz.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
- 1.1 Bedeutung der Gasdynamik . . . 3
- 1.2 Ziel der Studienarbeit und Vorgehensweise . . . 3

2 Theorie **4**
- 2.1 Die Euler-Gleichungen mit Erhaltungsgrößen . . . 4
- 2.2 Die Euler-Gleichungen mit primitiven Variablen . . . 5
- 2.3 Das Riemann-Problem . . . 5
- 2.4 Roes Näherung des Riemann-Problems . . . 6

3 Das Programm **8**
- 3.1 Das MUSCL Schema . . . 8
- 3.2 Randbedingungen . . . 9
- 3.3 Die Limiter . . . 10

4 Ergebnisse **11**
- 4.1 Anfangsbedingungen und Einstellungen . . . 11
- 4.2 Vor der Reflexion . . . 11
- 4.3 Nach der Reflexion . . . 13
- 4.4 Ergebnisse mit hochauflösendem Gitter . . . 18
- 4.5 Ergebnisse für große Zeiten . . . 24

5 Schlussfolgerungen **24**

1 Einleitung

1.1 Bedeutung der Gasdynamik

Strömungsmechanik behandelt die Physik von Flüssigkeiten und Gasen. Das Untergebiet Gasdynamik beschäftigt sich mit kompressiblen Gasen. Es hat viele Anwendungen in Wissenschaft und Technik wie zum Beispiel die Aerodynamik in Luft- und Raumfahrt oder im Automobilbau. Weitere Anwendungsgebiete sind Bootsbau, Astrophysik und Geophysik. Praktisch alle technisch relevanten Anwendungen müssen numerisch gelöst werden, da die wichtigen Gleichungen, wie die Navier-Stokes-Gleichungen, nur für eine sehr kleine Menge von Randbedingungen analytisch Lösbar sind.

1.2 Ziel der Studienarbeit und Vorgehensweise

Bei den in der numerischen Gasdynamik eingesetzten „Slope averaging“ Verfahren, benötigt man Mittelungsfunktionen oder Limiter um gemittelte Steigungen für das Verfahren zu errechnen. Es werden viele verschiedene dieser Limiter bei solchen Verfahren eingesetz. Sie haben unterschiedliche Vor- und Nachteile. In dieser Studienarbeit wurden die Lösungen der Euler-Gleichungen, die mit einem „Slope averaging“ aber verschiedenen Limitern errechnet wurden, auf ihr Verhalten nach einer Reflexion an einer festen Wand in einem 1-D Stoßrohr untersucht. Das „Slope averaging“ Verfahren führt in Abhängigkeit des gewählten Limiters zu unphysikalischen Oszillationen nach der Reflexion. Ziel der Studienarbeit ist es Empfehlungen bei der Wahl der Limiter zu geben um diese Oszillationen zu vermeiden.

Natürlich ist es eine sehr starke Idealisierung von einem eindimensionalen idealen Gas ohne Reibung auszugehen, was in dieser Studienarbeit getan wird. Aber es ist sinnvoll die Eigenschaften von neuen Verfahren erst an einfachen und schon gut untersuchten Problemen zu testen bevor man Probleme angeht, deren Lösungen unbekannt sind.

Um die Tests durchzuführen wurde ein Stoßrohr-Programm in C++ geschrieben. Es errechnet die Lösungen der eindimensionalen Euler-Gleichungen für einen bestimmten Zeitpunkt t. Das Programm benutzt eine Version von Hancocks MUSCL Verfahren mit „Slope Averaging“ (für Details siehe Kapitel 3.1) und des weiteren die auf Roe zurückgehende Näherung der Euler-Gleichung mit „Average State Quantities“, auf die in Kapitel 2.4 genauer eingegangen wird. Die Ergebnisse liegen als reine ASCII Daten vor und wurden mit Gnuplot dargestellt.

Weil die Stoßrohr Simulation oft in der Lehre zu numerischer Gasdynamik behandelt wird und viele Verfahren erst an den eindimensionalen Euler-Gleichungen im Stoßrohr getestet werden, gibt es sehr viele verfügbare Implementierungen. Das Stoßrohr-Programm, das für diese Studienarbeit in C++ geschrieben wurde orientiert sich an einem in J. Nabers Paper [1] abgedrucktem Fortran 90 Programm, welches die geforderten Eigenschaften - Lösung der Euler-Gleichungen mit einem „Slope Averaging“ Verfahren, dessen Limiterfunktionen austauschbar sind - schon enthielt.

2 Theorie

2.1 Die Euler-Gleichungen mit Erhaltungsgrößen

Die Grundgleichungen der Hydrodynamik oder Strömungsmechanik sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Ohne Reibung vereinfachen sie sich zu den Euler-Gleichungen, die im eindimensionalen Fall, und mit Hilfe von Erhaltungsgrößen in differenzieller Form notiert, folgende Gestalt haben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{q} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{f}(\vec{q}) = 0$$

mit

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \text{ und } \vec{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ u(E+\rho) \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei ρ die Dichte, u die Geschwindigkeit, p der Druck und E die totale Energiedichte ist. Die Euler-Gleichungen sind hyperbolische, partielle Differenzialgleichungen. Sie sind geeignet reibungsfreie, kompressible und unstetige Bewegungen in idealen Gasen zu beschreiben. Obwohl es auch möglich ist die Euler-Gleichung wie in Gleichung (4) direkt über die gesuchten Größen ρ, u, und p zu formulieren, ist es nötig die Differenzialgleichung mit Erhaltungsgrößen zu schreiben, da nur dieses Vorgehen bei unstetigen Anfangsbedingungen (Schocks) bei numerischer Lösung zu physikalisch richtigen Werten von ρ, u, und p führt.

Die Euler-Gleichungen lassen sich auch auf quasi-lineare Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{q} + \mathbf{A}(\vec{q})\frac{\partial}{\partial x}\vec{q} = 0 \tag{2}$$

Dabei wird die Ableitung des Flusses $\frac{\partial}{\partial x}\vec{f}(\vec{q})$ als $\mathbf{A}(\vec{q})\frac{\partial}{\partial x}\vec{q}$ geschrieben, wobei $\mathbf{A}$ die Jacobi-Matrix $a_{i,j} = \frac{\partial}{\partial q_i} f_j$ ist. Berechnet man mit Hilfe der Eigenwerttheorie Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\vec{v}_i$ von $\mathbf{A}$ ergeben sich diese zu:

$$\lambda_1 = u - a \quad \lambda_2 = u \quad \lambda_3 = u + a$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{pmatrix} \tag{3}$$

H steht dabei für die totale spezifische Enthalpie und a für die Schallgeschwindigkeit. Es gilt $H = (E + p)/\rho$ und $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$, wobei γ der Adiabatenexponent ist. Mit seiner Hilfe lässt sich auch die totale Energiedichte E ausdrücken:

$$E = \rho\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}\right)$$

Die quasi-lineare Form ist Ausgangspunkt vieler numerischer Methoden, da sich bei bekannten Eigenwerten und -vektoren der Fluss $\vec{f}$ als Linearkombination dieser darstellen lässt. Die Eigenwerte entsprechen außerdem den Geschwindigkeiten der verschiedenen Bereiche in Abbildung 1.

$\vec{w}_L$	$\vec{w}_R$
1.0	0.125
0.0	0.0
1.0	0.1

Tabelle 1: Die Anfangswerte des Sod's Testcase

2.2 Die Euler-Gleichungen mit primitiven Variablen

Da ein Teil des Stoßrohrprogramms direkt mit den Zustandsgrößen ρ, u, p und nicht mit den Erhaltungsgrößen $\vec{q}$ arbeitet, ist in Gleichung 4 die quasi-lineare Form der Euler-Gleichungen mit ρ, u, p gegeben.

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{w} + \mathbf{A}(\vec{w})\frac{\partial}{\partial x}\vec{w} = 0 \tag{4}$$

mit

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}$$

und der Matrix $\mathbf{A}$ in expliziter Form:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & u \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.3 Das Riemann-Problem

Eine bekannte Form für unstetige Anfangsbedingungen für die Euler-Gleichungen ist das Riemann-Problem. Die Anfangswerte werden unterteilt in einen rechten und linken Bereich, die jeweils konstant sind, aber unterschiedliche Werte haben. Die Unstetigkeit liegt damit an der Stelle, die die beiden Bereiche abgrenzt. Das Riemann Problem für die Euler-Gleichungen lässt sich folgendermaßen notieren:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{q} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{f}(\vec{q}) = 0 \quad \text{mit Anfangswert} \quad \vec{q}(x,0) = \begin{cases} \vec{q}_L & \forall x < x_0 \\ \vec{q}_R & \forall x > x_0 \end{cases}$$

Diese Anfangsbedingungen führen auf die physikalischen Phänomene Schock, Verdichtungsstöße und Verdünnungswellen.

Diese hyperbolische, partielle Differenzialgleichung ist analytisch lösbar. Das allgemeine Verhalten dieser Lösung mit der in Tabelle 1 gegebenen Anfangswerten ist in Abbildung 1 zu sehen. Wie in der Literatur üblich sind die Anfangswerte dort in Form der sogenannten primitiven Variablen angegeben und nicht als Erhaltungsgrößen. Es gilt $\vec{w} = (\rho, u, p)^{\mathrm{T}}$.

Die Anfangswerte aus Tabelle 1 nennt man auch Sod's Testcase [2], sie werden häufig in der Literatur verwendet. In Abbildung 2 sieht man ein numerisches Gitter das mit

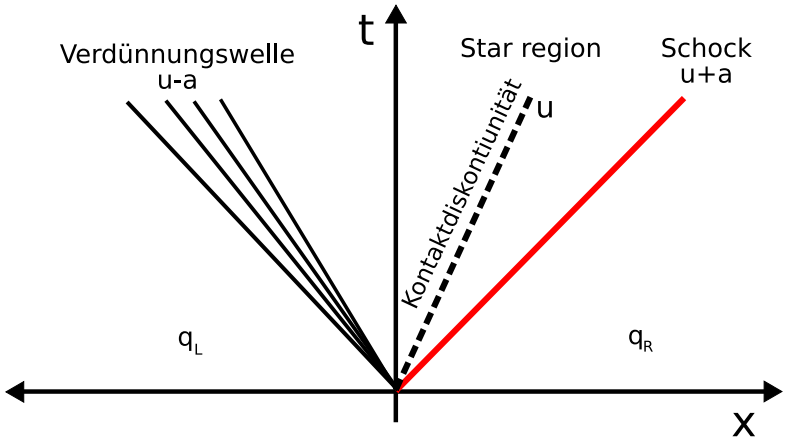

Abbildung 1: Fächerdiagramm mit Verdünnungswelle und Schock, die sich mit $u - a$ bzw. $u + a$ von der ursprünglichen Unstetigkeit entfernen.

diesen Anfangswerten initialisiert wurde. Anschaulich entspricht Sod's Testcase einem Kasten mit einer Trennwand in der Mitte, die einen Bereich mit hohem Druck und Dichte von einem Bereich mit niedrigem Druck und Dichte trennt. Im gesamten Kasten gibt es zunächst keine Strömungen bzw. Flüsse; daher $u_L = u_R = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet die Trennwand. Wie in Abbildung 1 zu erkennen ist, führt dieses spezielle Riemann Problem zu einem Schock der sich mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt und zu einem Verdünnungswelle genannten Bereich, deren Grenze zum linken ruhenden Bereich sich mit konstanter Geschwindigkeit in negativer x-Richtung bewegt. Die Verdünnungswelle nimmt mit fortschreitender Zeit immer mehr Raum ein ebenso wie der Star Region genannte Bereich zwischen Schock und Verdünnungswelle. Innerhalb der Star Region gibt es eine weitere Unstetigkeit; die Kontaktdiskontinuität. Der Name Star Region kommt von der üblichen Bezeichnung ρ^* u^* p^* für die Zustandsgrößen zwischen Schock und Verdünnungswelle.

Die explizite Form von $\vec{w}(x,t)$ der analytischen Lösung findet sich zum Beispiel in Toros Buch über Numerische Methoden in der Gasdynamik [3].

2.4 Roes Näherung des Riemann-Problems

Schon die zweidimensionalen Euler-Gleichungen oder eine Problemstellung, die entgegenlaufende oder reflektierende Wellen zulässt, ist nicht mehr analytisch lösbar.

Die numerischen Algorithmen, die die Euler-Gleichungen lösen, sind gerade im mehrdimensionalen Fall oder bei einer großen Menge an Zeitschritten oder Gitterpunkten oft zu rechenintensiv. Daher werden meistens schon die Euler-Gleichungen selbst mit einfacher zu lösenden Gleichungen angenähert.

In dieser Studienarbeit wurde der genäherte Riemann-Löser von Roe verwendet. Er gehört zu den heute meistbenutzten Näherungen für die Euler-Gleichungen in der numerischen Gasdynamik. Er wurde das erste mal von Roe in einem Paper [4] von 1981 vorgestellt und dann von ihm und anderen immer weiter verbessert.

Roes Ansatz ist es die Jacobi-Matrix $\mathbf{A}(\vec{q})$ in der quasi linearen Form (2), die für jedes x oder t andere Werte annimmt, durch eine konstante Matrix $\tilde{\mathbf{A}}(\vec{q}_L, \vec{q}_R)$, die nur noch von den Anfangswerten abhängt, zu ersetzen. Das neue genäherte Riemannproblem lautet also:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{q} + \tilde{\mathbf{A}}\frac{\partial}{\partial x}\vec{q} = 0 \quad \text{mit Anfangswert} \quad \vec{q}(x,0) = \begin{cases} \vec{q}_L & \forall x < x_0 \\ \vec{q}_R & \forall x > x_0 \end{cases}$$

Mit diesem Ansatz und den ebenfalls von Roe eingeführten „Average State Quantities"(6) sind die Größen in den genäherten Eigenwerten $\tilde{\lambda}_i$, Eigenvektoren $\tilde{\vec{v}}_i$ und die Amplituden $\tilde{\alpha}_i$ nur noch von $\vec{q}_L$ und $\vec{q}_R$ abhängig und lassen sich explizit angeben.

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad \tilde{u} = \frac{u_L + \omega u_R}{1+\omega} \quad \tilde{H} = \frac{H_L + \omega H_R}{1+\omega} \quad \tilde{a} = \sqrt{(\gamma-1)(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2)} \tag{6}$$

Wobei gilt: $\omega = \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}}$

Die genäherten Eigenvektoren sind identisch mit den exakten aus Gleichung (3) nur das sie nun von den „Roe Average State Quantities" (6) abhängen anstat von den exakten Zustandsgrößen. Die genäherten Amplituden berechnen sich mit:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\Delta p - \tilde{\rho}\tilde{a}\Delta u}{2\tilde{a}^2} \quad \tilde{\alpha}_2 = \Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \quad \tilde{\alpha}_3 = \frac{\Delta p + \tilde{\rho}\tilde{a}\Delta u}{2\tilde{a}^2}$$

Wobei $\Delta x = x_R - x_L$ ist.

In der ursprünglichen Roe Methode waren die genäherten Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$, wie die Eigenvektoren, identisch mit den exakten bis auf das Ersetzen der Zustandsgrößen mit den „Roe Average State Quantities". In dieser Studienarbeit wird Roes Methode mit dem sogenannten Entropie-Fix verwendet, da die Näherung mit Entropie-Fix bessere Ergebnisse bei den kontinuierlichen Übergängen in Verdünnungswellen liefert. Der Entropie-Fix bewirkt eine Änderung der genäherten Eigenwerte zu den genäherten Eigenwerten mit Entropie-Fix $\tilde{\lambda}_i^*$. Ihre Beträge haben folgende Gestalt:

$$|\tilde{\lambda}_i|^* = \begin{cases} |\tilde{\lambda}_i| & \text{für } |\tilde{\lambda}_i| \geq \frac{\delta\lambda_i}{2} \\ \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{\delta\lambda_i} + \frac{\delta\lambda_i}{4} & \text{für } |\tilde{\lambda}_i| < \frac{\delta\lambda_i}{2} \end{cases}$$

Der Parameter $\frac{\delta\lambda_i}{2}$ ist definiert über

$$\frac{\delta\lambda_i}{2} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 2 \\ \min(\tilde{a}, \max(0, 2(\lambda_{Ri} - \lambda_{Li}))) & \text{für } i \in \{1;3\} \end{cases}.$$

Mit all diesen Gleichungen lässt sich nun der Fluss (7) der Euler-Gleichungen berechnen.

$$\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{f}_L + \vec{f}_R) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \tilde{\alpha}_i |\tilde{\lambda}_i|^* \tilde{\vec{v}}_i \tag{7}$$

Wird dieses Verfahren in einem numerischen Algorithmus benutzt, sind q_R, q_L, $\vec{f}_R$ und $\vec{f}_L$ oder andere Rechts- oder Linkswerte nicht die Anfangswerte sondern die linken und rechten Werte der aktuellen Gitterzelle zum aktuellen diskreten Zeitpunkt.

3 Das Programm

3.1 Das MUSCL Schema

Die Stoßrohrsimulation benutzt eine Finite-Volumen-Diskretisierung der Raumdimension. Die primitiven Variablen $\vec{w}$ sind im Zentrum jeder Gitterzelle x_i definiert. Rechts und links des Gitters wird je eine Geisterzelle hinzugefügt um die Randbedingungen zu implementieren; entweder reflektierende Wände oder freier Raum in den Gas entweichen kann. Um iterativ durch Zeit und Raum zu schreiten wird ein „Monotone Upstream-centert Scheme for Conversation Laws“ (MUSCL) mit „Limited Slopes“ benutzt. Das MUSCL Schema versucht ausgehend vom einfachen Upwind Verfahren höhere Ordnung an Genauigkeit zu erzielen ohne dabei unphysikalische Oszillationen in der Nähe von starken Änderung des Gradienten zu erzeugen. Es hat folgenden Ablauf:

1. Es wird für jede Gitterzelle eine Steigung $\delta\vec{w}_i$ mit Hilfe einer Mittelungsfunktion avg oder „Limiters“ berechnet (daher die Bezeichnung Limited Slopes). Die Mittelungsfunktion berücksichtigt dabei die Zelle selbst und beide Nachbarzellen. Eine Auswahl möglicher Mittelungsfunktionen ist in Kapitel 3.3 zusammengestellt.

$$\delta\vec{w}_i = \text{avg}(\vec{w}_i - \vec{w}_{i-1}, \vec{w}_{i+1} - \vec{w}_i)$$

2. In einem sogenannten „Predictor Step“ wird ein entsprechender Wert $\vec{w}_P$ berechnet.

$$\vec{w}_{P,i} = \vec{w}_i - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{A}_i\delta\vec{w}_i$$

   Die Matrix $\mathbf{A}_i$ ist dabei wie in Gleichung (5) definiert, nur dass für die in der Matrix enthaltenen Variablen die diskreten Werte aus $\vec{w}_i$ benutzt werden.

3. In einem „Corrector“ oder „Reconstuction Step“ wird für jede Zelle x_i die Werte der primitiven Variablen $\vec{w}_i$ auf der rechten und linken Zellengrenze berechnet. Also ein Wert $\vec{w}_{R,i-\frac{1}{2}}$ und $\vec{w}_{L,i+\frac{1}{2}}$. Das heißt, es gibt bei i Gitterzellen $2i$ Werte von $\vec{w}$ auf den Zellwänden.

$$\vec{w}_{R,i-\frac{1}{2}} = \vec{w}_{P,i} - \frac{1}{2}\delta\vec{w}_i, \quad \vec{w}_{L,i+\frac{1}{2}} = \vec{w}_{P,i} + \frac{1}{2}\delta\vec{w}_i$$

4. Mit dem in Kapitel 2.4 vorgestellten Riemann-Löser wird nun der Fluss $\vec{f}_i$ für jede Gitterzelle berechnet. Als Anfangsbedingungen werden die rechten und linken Werte auf den Zellengrenzen verwendet. Genauer werden mit $\vec{w}_{R,i-\frac{1}{2}}$ und $\vec{w}_{L,i+\frac{1}{2}}$ die „Roe Average State Quantities“ (6) berechnet mit denen sich dann der Fluss nach Gleichung (7) ergibt. Für eine direkte Implementierung im Programmcode eignet sich allerdings Gleichung (8) besser als Gleichung (7).

$$\vec{f} = \begin{cases} \vec{f}_L + \lambda_1^- \tilde{\vec{v}}_1 \tilde{\alpha}_1 & \text{für } \tilde{u} \geq 0 \\ \vec{f}_R - \lambda_3^+ \tilde{\vec{v}}_3 \tilde{\alpha}_3 & \text{für } \tilde{u} < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Die neuen Eigenwerte λ^- und λ^+ sind definiert als:

$$\lambda_k^- = \begin{cases} \tilde{\lambda}_k & \text{für } \tilde{\lambda}_k \leq -\frac{\delta\lambda_k}{2} \\ -\frac{(\tilde{\lambda}_k - \frac{\delta\lambda_k}{2})^2}{2\delta\lambda_k} & \text{für } \frac{\delta\lambda_k}{2} < \tilde{\lambda}_k < \frac{\delta\lambda_k}{2} \\ 0 & \text{für } \tilde{\lambda}_k \geq \frac{\delta\lambda_k}{2} \end{cases}$$

$$\lambda_k^+ = \begin{cases} \tilde{\lambda}_k & \text{für } \tilde{\lambda}_k \leq -\frac{\delta\lambda_k}{2} \\ \frac{(\tilde{\lambda}_k + \frac{\delta\lambda_k}{2})^2}{2\delta\lambda_k} & \text{für } \frac{\delta\lambda_k}{2} < \tilde{\lambda}_k < \frac{\delta\lambda_k}{2} \\ 0 & \text{für } \tilde{\lambda}_k \geq \frac{\delta\lambda_k}{2} \end{cases}$$

Es können auch andere Riemann-Löser als der von Roe benutzt werden um den Fluss zu berechnen.

5. Mit den $\vec{f}_i$ wird die Zeititeration für das gesamte Gitter vorgenommen.

$$\vec{q}_i^{n+1} = \vec{q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\vec{f}_{i+1} - \vec{f}_i)$$

Wegen der in Kapitel 2.1 genannten Gründe liefert der Riemann-Löser den Fluss der Erhaltungsvariablen $\vec{f}(\vec{q})$ und nicht $\vec{f}(\vec{w})$. Die in dieser Studienarbeit verwendete Version von MUSCL arbeitet aber mit den primitiven Variablen $\vec{w}$. Man muss also zunächst mit der Definition von $\vec{q}$ in Gleichung (1) eine Umrechnung von $\vec{w}_i^n$ zu $\vec{q}_i^n$ vornehmen, bevor man die Zeititeration durchführen kann. Hat man $\vec{q}_i^{n+1}$ berechnet werden diese in $\vec{w}_i^{n+1}$ zurückkonvertiert. Mit den neuen $\vec{w}_i^{n+1}$ beginnt das Schema von vorne.

Werden die Limited Slopes Werte $\delta\vec{w}$ immer konstant auf 0 gesetzt anstatt sie mit einer Mittelungsfunktion zu berechnen, wird das MUSCL Schema zu einem einfachen Upwind Algorithmus erster Ordnung und liefert entsprechend identische Ergebnisse wie dieser.

3.2 Randbedingungen

Um reflektierende, feste Wände zu simulieren müssen entsprechende Randbedingungen mit Hilfe der Geisterzellen x_0 und x_{N+1} implementiert werden. Die folgenden Randbedingungen müssen in jeder Zeititeraton für die primitiven Variablen $\vec{w}$ und gemittelten Steigungen $\delta\vec{w}$ gesetzt werden:

$$\begin{array}{cccc} \rho_0 = \rho_1 & \rho_{N+1} = \rho_N & \delta\rho_0 = -\delta\rho_1 & \delta\rho_{N+1} = -\delta\rho_N \\ u_0 = -u_1 & u_{N+1} = -u_N & \delta u_0 = \delta u_1 & \delta u_{N+1} = \delta u_N \\ p_0 = p_1 & p_{N+1} = p_N & \delta p_0 = -\delta p_1 & \delta p_{N+1} = -\delta p_N \end{array} \tag{9}$$

Es gibt auch Randbedingungen, durch die Überschallwellen frei aus dem Stoßrohr Entweichen können. Sie wurden in dieser Studienarbeit nicht verwendet, sind aber wegen der Vollständigkeit ebenfalls im Programm implementiert:

$$\vec{w}_0 = \vec{w}_1 \quad \vec{w}_{N+1} = \vec{w}_N \quad \delta\vec{w}_0 = 0 \quad \delta\vec{w}_{N+1} = 0$$

3.3 Die Limiter

Die Stoßrohrsimulation dieser Studienarbeit benötigt Mittelwertsfunktionen oder Limiter, die immer einen Mittelwert aus 2 Argumenten $\vec{w}_i - \vec{w}_{i-1}$ und $\vec{w}_{i+1} - \vec{w}_i$ bestimmen, im Folgenden als a und b abgekürzt. Hier werden die Limiter eingesetzt um gemittelte Steigungen (Limited Slopes) zu berechnen. In anderen in der Gasdynamik verwendeten numerischen Methoden werden die selben Mittelungsfunktionen verwendet um die auf den Gitterzellen oder -rändern definierten Flüsse zu mitteln. Diese werden „Limited Flux“ Methoden genannt. Man kann die selben Limiter auf verschiedene Art und Weise mathematisch definieren. Daher finden sich in der Literatur auch Ausdrücke, die zwar das gleiche aussagen aber eine andere Gestalt haben. Im Programm wurden folgende Mittelwertsfunktionen avg implementiert:

Algebraischer Mittelwert:

$$\operatorname{avg}(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

Minmod (auch Minbee genannt):

$$\operatorname{avg}(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{für } ab \leq 0 \\ a & \text{für } |a| < |b| \wedge ab > 0 \\ b & \text{für } |a| > |b| \wedge ab > 0 \end{cases}$$

Der Minmod Limiter liefert also immer das Argument, dessen Abstand zur 0 am kleinsten ist, falls beide Argumente das gleiche Vorzeichen haben, ohne dessen Vorzeichen zu verändern. Haben die Argumente unterschiedliche Vorzeichen wird 0 zurückgegeben. Die allgemeinste Form des Minmod Limiters für beliebige diskrete oder kontinuierliche Untermengen $\mathbb{A}$ der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ hat somit die Gestalt:

$$\operatorname{minmod}\{\mathbb{A}\} = \begin{cases} \inf \mathbb{A} & \text{für } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}_+ \\ \sup \mathbb{A} & \text{für } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}_- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Double Minmod:

$$\operatorname{avg}(a,b) = \begin{cases} \operatorname{minmod}(\frac{a+b}{2}, 2a, 2b) & \text{für } ab > 0 \\ 0 & \text{für } ab \leq 0 \end{cases}$$

Superbee:

$$\operatorname{avg}(a,b) = \begin{cases} \operatorname{minmod}(\operatorname{maxmod}(a,b), \operatorname{minmod}(2a, 2b)) & \text{für } ab > 0 \\ 0 & \text{für } ab \leq 0 \end{cases}$$

Die hier benötigte Definition von maxmod ist völlig analog zu minmod:

$$\operatorname{maxmod}\{\mathbb{A}\} = \begin{cases} \sup \mathbb{A} & \text{für } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}_+ \\ \inf \mathbb{A} & \text{für } \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}_- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Korens Limiter:

$$\text{avg}(a,b) = \begin{cases} \text{minmod}(2a, \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, 2b) & \text{für } ab > 0 \\ 0 & \text{für } ab \leq 0 \end{cases}$$

Anpassbarer Limiter:

$$\text{avg}(a,b) = \max(0, \min(pb, \max(a, \min(b, pa)))) + \min(0, \max(pb, \min(a, \max(b, a))))$$

In dieser Mittelungsfunktion gibt es einen Parameter p, der aus dem Intervall $[1, 2]$ gewählt werden muss. Für $p = 1$ ist dieser Limiter Identisch mit dem Minmod Limiter und für $p = 2$ identisch mit dem Superbee Limiter. Der anpassbare Limiter wurde einem Paper über Methoden für die Interaktion von Planetenscheiben [5] entnommen. Eine Alternative Formel für diesen Limiter und noch einige andere finden sich in Toros Buch [3].

4 Ergebnisse

4.1 Anfangsbedingungen und Einstellungen

Als Anfangsbedingung diente immer Sod's Testcase wie in Tabelle 1 angegeben und als räumliche Randbedingungen immer reflektierende Wände wie in Gleichung 9 definiert. Die Gitterlänge war immer 1 und die Anzahl der Gitterzellen 200 damit ergibt sich ein $\Delta x = 0.005$. Die Grenze zwischen linken und rechten Anfangswerten ist genau bei $x = 0.5$. Δt wurde konstant auf 0.00025 gehalten. Um dies zu erreichen mussten, die Zeititerationsschritte entsprechen geändert werden, wenn verschiedene Endzeiten für die Simulation gewählt wurden. Es ergibt sich für das Gitter zum Zeitpunkt $t = 0$ also die in Abbildung 2 gezeigte Situation.

Wenn immer die Ergebnisse der Simulation mit den „echten“ Ergebnissen verglichen werden, ist damit eigentlich ein Vergleich mit einem hochaufgelöstem Durchlauf der Simulation gemeint. Für die Abbildungen der Situation vor der Reflexion wurde die Anzahl der Gitterzellen auf 4000 (damit $\Delta x = 0.00025$), die Anzahl der Zeititerationen auf 8000 (damit $\Delta t = 3.125 \cdot 10^{-5}$) gesetzt und Korens Limiter verwendet. Für die Abbildungen der Situation nach der Reflexion wurde die Anzahl der Gitterzellen auf 3000 (damit $\Delta x = 0.000\overline{3}$), die Anzahl der Zeititerationen auf 6000 (damit $\Delta t = 8.\overline{3} \cdot 10^{-5}$) gesetzt und Korens Limiter verwendet.

4.2 Vor der Reflexion

Zunächst einmal ein Vergleich aller verwendeter Limiter zum Zeitpunkt $t = 0.25$ also noch bevor die Schockwelle das Ende des Stoßrohrs und damit die reflektierende Wand erreicht hat. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3 bis 11 zu sehen. Weil die Ergebnisse des anpassbaren Limiters, wie erwartet, für Parameter $p = 1$ identisch mit dem Minmod Limiter und für $p = 2$ identisch mit dem Superbee Limiter waren, werden diese hier nicht zusätzlich gezeigt. Die exakten Ergebnisse sind in den Schaubildern als feine Linien über die Datenpunkte gelegt.

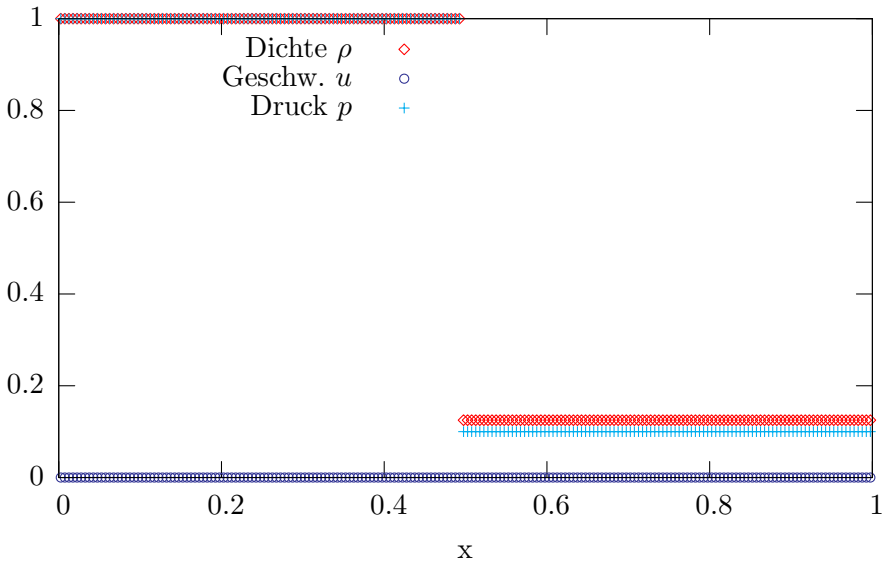

Abbildung 2: Das Gitter zum Zeitpunkt $t = 0$, initialisiert mit den Anfangswerten aus Tabelle 1 (Sod's Testcase).

Das einfache Upwindverfahren in Abbildung 3 zeigt in der Nähe von Unstetigkeiten die größten Abweichungen von der Referenzlösung. Es schmiert die Unstetigkeiten zu weichen Übergängen aus. Am stärksten geschieht das, wie auch bei allen eingesetzten Limitern, bei der Kontaktdiskontinuität der Dichte ρ.

Mit dem algebraischen Mittelwert, wie in Abbildung 4 als Limiter eingesetzt, kann das MUSCL Verfahren zwar recht gut den unstetigen Verlauf der Zustandsgrößen folgen nur kommt es dabei zu Oszillationen bei Änderungen des Gradienten. Dies wird besonders deutlich bei dem Abfall der Geschwindigkeit von fast 1 auf 0 kurz vor dem rechten Ende des Stoßrohrs. Das liegt daran, dass der algebraische Mittelwert als einziger in dieser Studienarbeit benutzte Limiter linear ist. Der algebraische Mittelwert ist daher allgemein keine gute Wahl als Mittelungsfunktion für „Limited Slopes" Verfahren, da er die Intention dieser Verfahren - gute Näherung von unstetigen Lösungen ohne unphysikalische Oszillationen - vereitelt.

Alle anderen Limiter (Abbildung 5 bis 11) unterscheiden sich durch ihre Genauigkeit mit der sie der unstetigen physikalischen Lösung folgen können. Es gibt dabei einen fließenden Übergang vom einfachen Upwind Verfahren, deren Lösungen am ausgeschmiertesten sind über Minmod Limiter bzw. den anpassbaren Limiter mit $p = 1$ weiter über die Ergebnisse mit steigendem p, bis hin zu Superbee bzw. anpassbarer Limiter mit $p = 2$, Double Minmod und Korens Limiter, die fast alle gleich kantig und damit der physikalischen Lösung am Nächsten sind. Die genaueren Mittelungsfunktionen erkaufen sich das mit etwas erhöhtem Rechenaufwand was man schon an den mathematischen Definitionen dieser Limiter in Kapitel 3.3 erkennen kann. Allerdings haben die Limiter die besonders gut den Unstetigkeiten folgen können den auch noch den Nachteil, dass

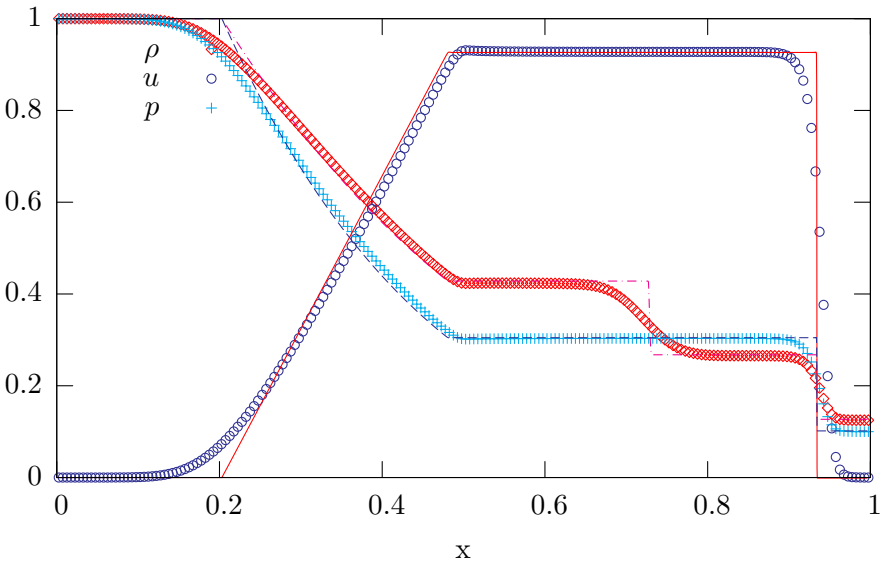

Abbildung 3: Limiter: Kein Limiter (entspricht Upwind Verfahren erster Ordnung). Zeit: $t = 0.25$.

sie kurz vor und nach der Kontaktdiskontinuität der Dichte ρ leicht zu niedrige Werte annehmen.

4.3 Nach der Reflexion

Lässt man die Simulation weiterlaufen wird der Schock an der rechten Wand des Stoßrohrs reflektiert, bewegt sich nun von der rechten Wand nach links und überlagert sich mit der nachfolgenden Star region. Bei machen Limitern treten nun der physikalischen Realität nicht entsprechende Oszillation in diesem Überlagerungsbereich auf.

Das einfache Upwind Verfahren in Abbildung 12, der Algebraische Mittelwert in Abbildung 13 und der Minmod Limiter 16 zeigen bei den hier gewählten numerischen Parametern ($\Delta x = 0.005$, $\Delta t = 0.00025$) überhaupt keine Oszillationen im Überlagerungsbereich. Interessant ist, dass der algebraische Mittelwert, obwohl er als einziger der hier benutzten Limiter zu Oszillationen bei Änderungen des Gradienten führt, keine zusätzlichen nach der Reflexion erscheinende Oszillationen aufweist.

Die anderen Limiter, also der anpassbare für alle $p \geq 1.25$ (Abbildung 17 bis 20), der Double Minmod (Abbildung 14) und Korens Limiter (Abbildung 15) zeigen Oszillationen im Überlagerungsbereich. Dabei sind die Oszillationen rechts der Schockwelle am größten und werden dann langsam kleiner. Sie werden also von der Schockwelle „hinterhergezogen“.

Beim anpassbaren Limiter gibt es einen klaren Zusammenhang zwischen dem Parameter p und der Stärke der Oszillationen. Für $p = 1$ (Minmod) sind gar keine vorhanden, wachsen dann über die Zwischenstufen $p = 1.25$ bis 1.75 immer weiter an und sind dann bei $p = 2$ (Superbee) die größten aller hier getesteten Limiter. Die Größe der Oszilla-

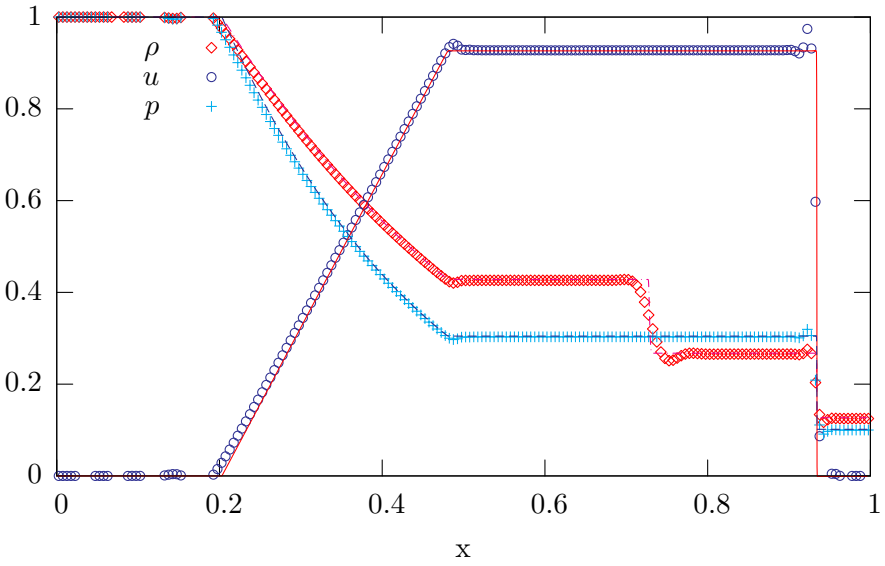

Abbildung 4: Limiter: Algebraischer Mittelwert. Zeit: $t = 0.25$.

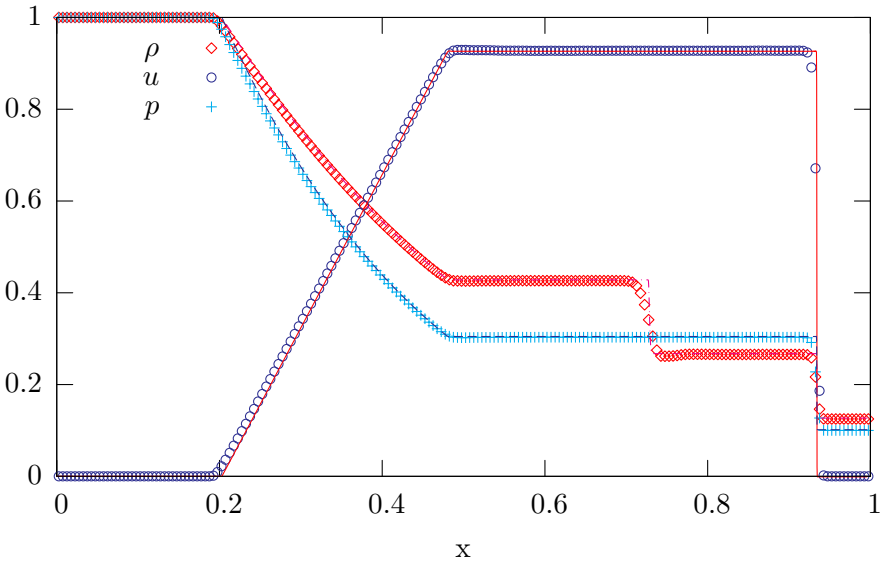

Abbildung 5: Limiter: Double Minmod. Zeit: $t = 0.25$.

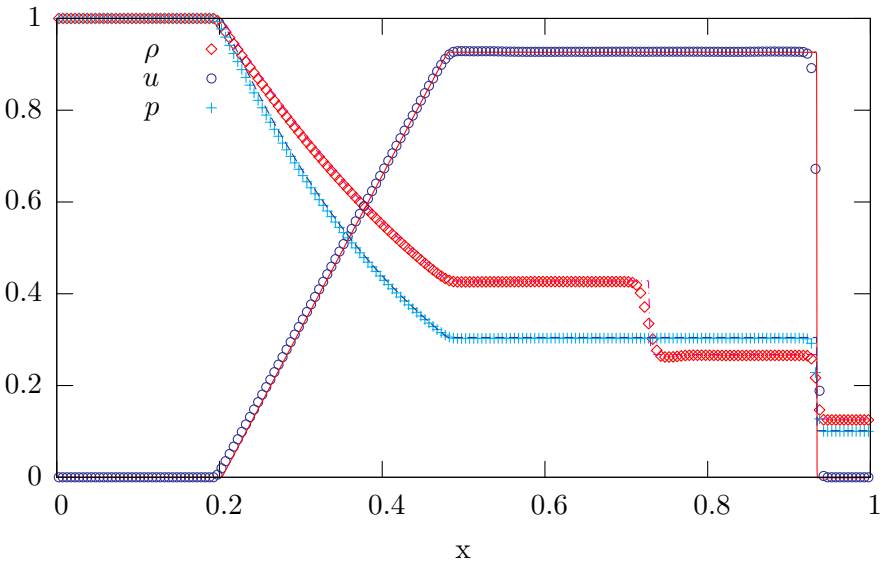

Abbildung 6: Limiter: Korens Limiter. Zeit: $t = 0.25$.

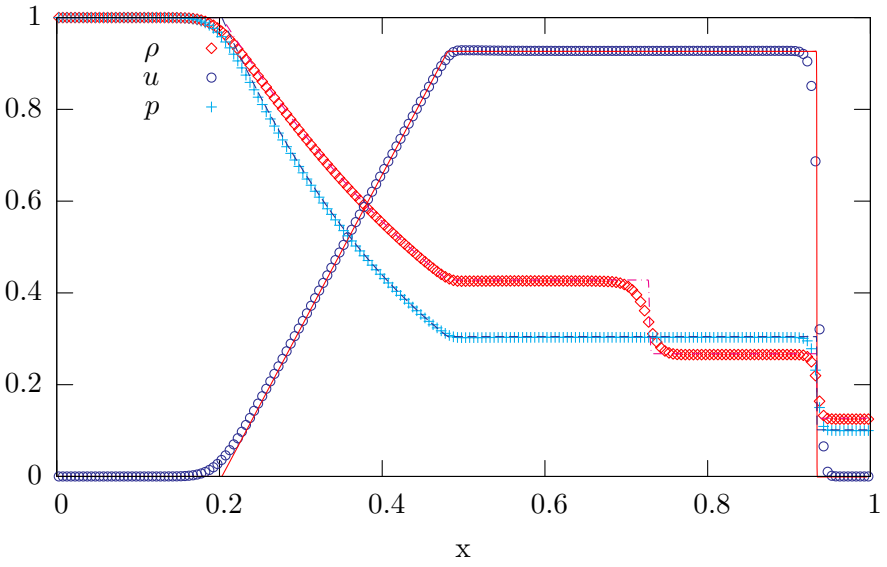

Abbildung 7: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1$ damit identisch mit Minmod. Zeit: $t = 0.25$.

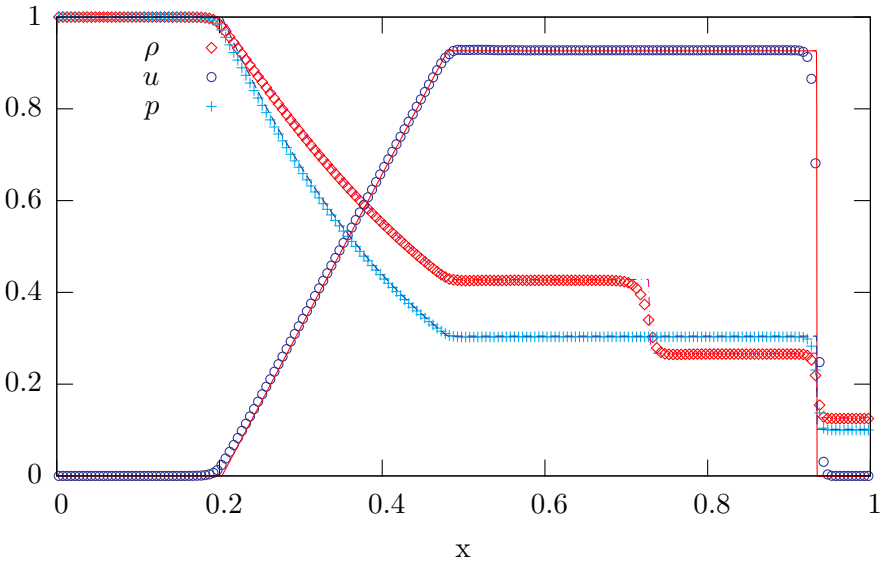

Abbildung 8: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1.25$. Zeit: $t = 0.25$.

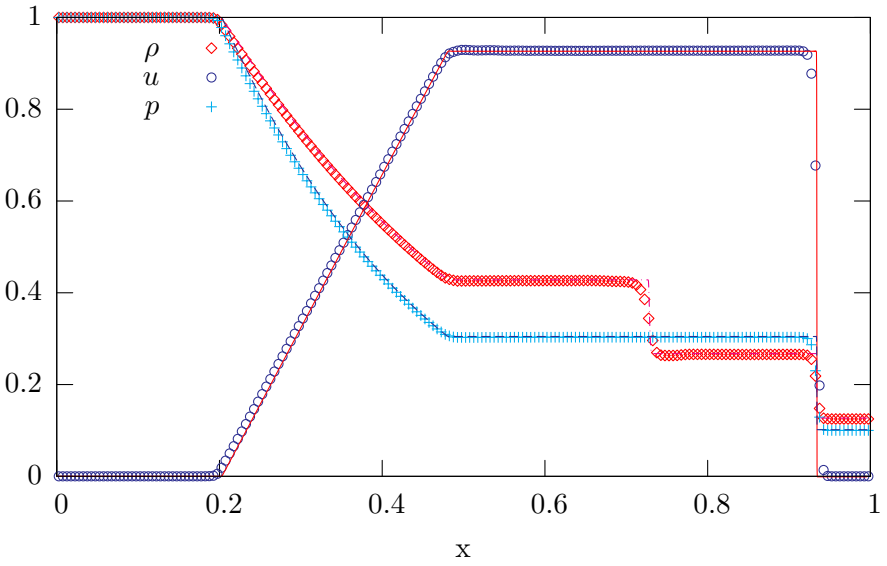

Abbildung 9: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1.5$. Zeit: $t = 0.25$.

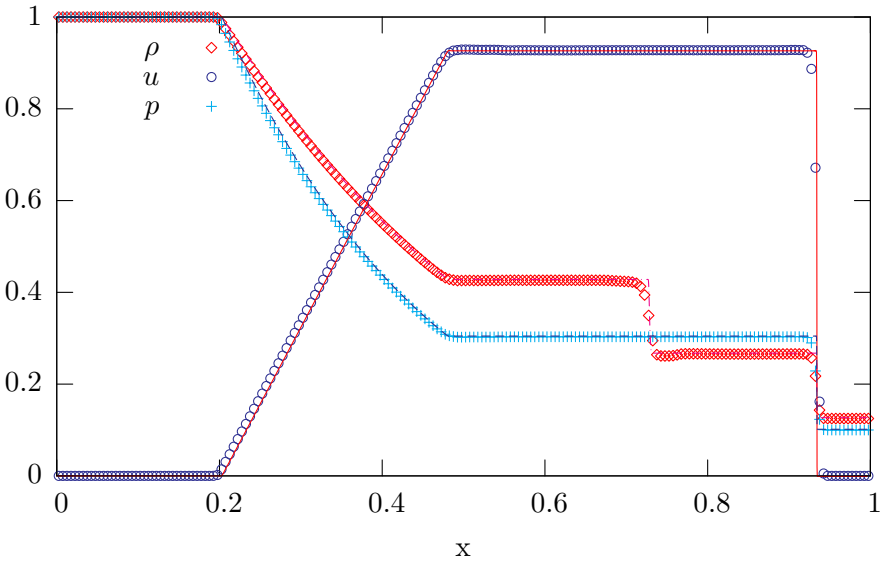

Abbildung 10: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1.75$. Zeit: $t = 0.25$.

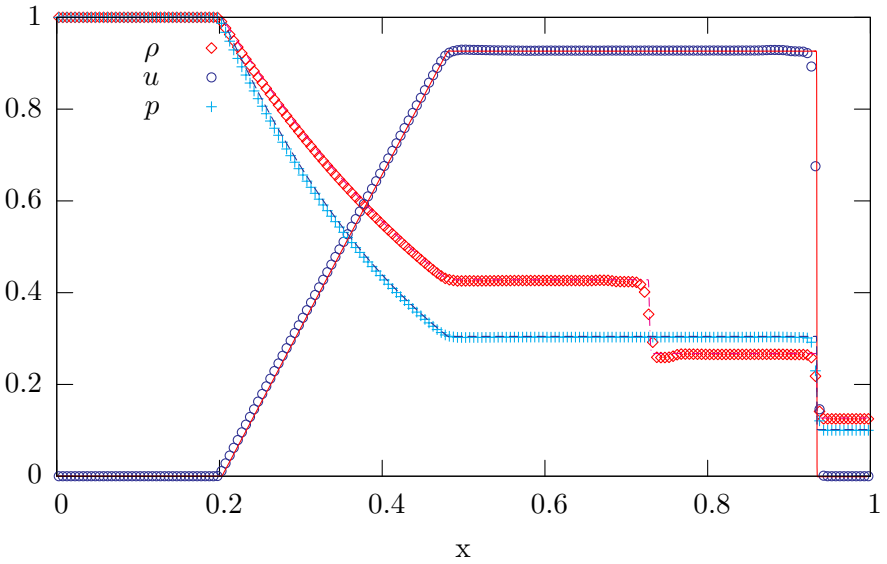

Abbildung 11: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 2$ damit identisch mit Superbee. Zeit: $t = 0.25$.

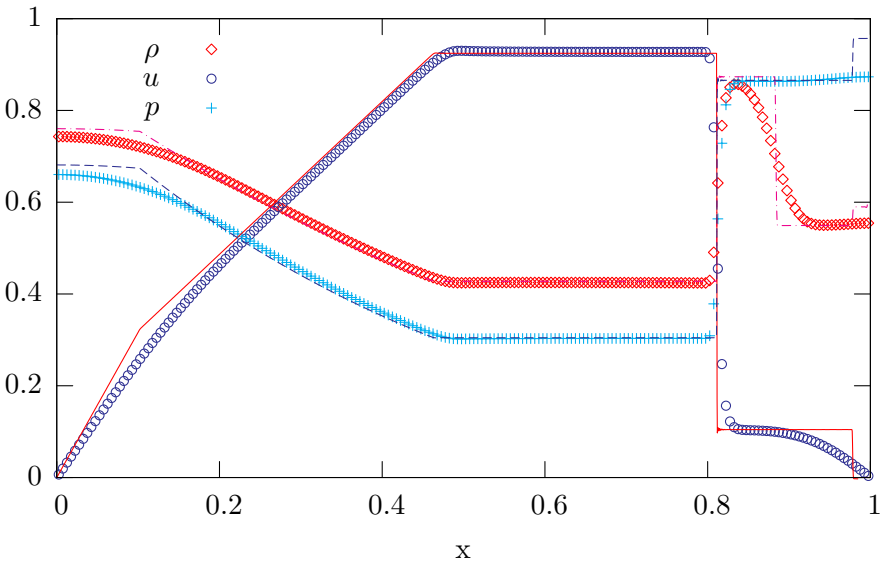

Abbildung 12: Limiter: Kein Limiter (entspricht Upwind Verfahren erster Ordnung). Zeit: $t = 0.5$.

tionen von Korens Limiter liegt zwischen der Größe der Oszillationen des anpassbaren Limiters für $p = 1.25$ und $p = 1.5$. Der Double Minmod zeigt Oszillationen der selben Größe wie die des anpassbaren Limiters für $p = 1.5$.

4.4 Ergebnisse mit hochauflösendem Gitter

Erhöht man die Zahl der Gitterzellen (bzw. verkleinert Δx) werden die Oszillationen in dem Überlagerungsbereich bei allen mit Limitern erzeugten Daten, die diese zeigen, kleiner. Dabei gibt es die Tendenz, dass bei Limiter, die bei 200 Gitterpunkten schon kleinere Oszillationen als andere zeigen, eine geringere Erhöhung der Gitterzellen nötig ist um die Oszillationen verschwinden zu lassen als bei denen, die größere Oszillationen zeigen.

So kann man beim anpassbaren Limiter mit $p = 1.25$ wie in Abbildung 21 zu erkennen schon bei 500 Zellen (bzw. $\Delta x = 0.002$) überhaupt keine Oszillationen mehr feststellen. Um dies deutlicher darzustellen wurde der Ausschnitt bei dem bei $t = 0.5$ die Überlagerung stattfindet vergrößert; also von $x = 0.8$ bis $x = 1$. In Abbildung 22 ist der gleiche Ausschnitt mit Superbee Limiter berechnet zu sehen. Trotz einer Auflösung von 2000 Zellen ($\Delta x = 0.0005$) kann man noch Oszillationen erkennen, allerdings sind sie viel kleiner und auf weniger Raum ausgedreht als in Abbildung 20, die mit 200 Gitterzellen erstellt wurde.

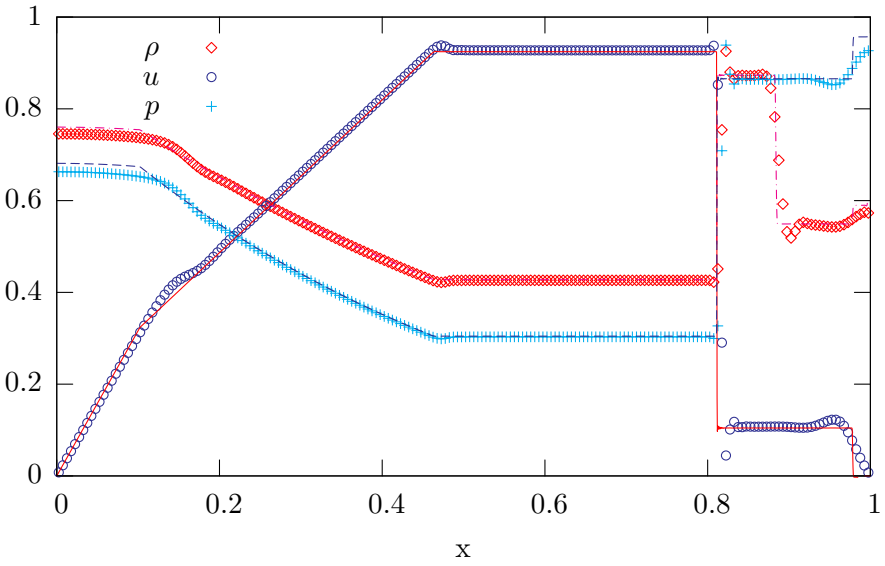

Abbildung 13: Limiter: Algebraischer Mittelwert. Zeit: $t = 0.5$.

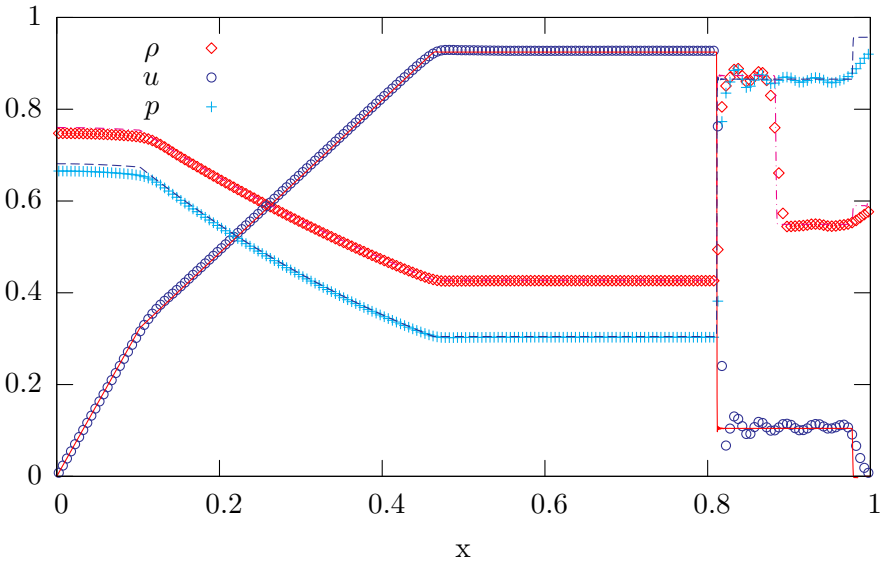

Abbildung 14: Limiter: Double Minmod. Zeit: $t = 0.5$.

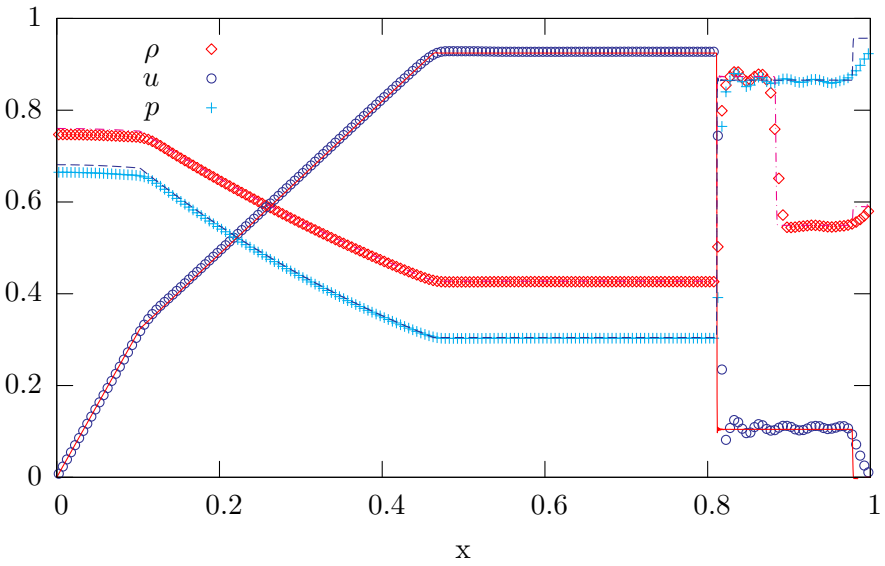

Abbildung 15: Limiter: Korens Limiter. Zeit: $t = 0.5$.

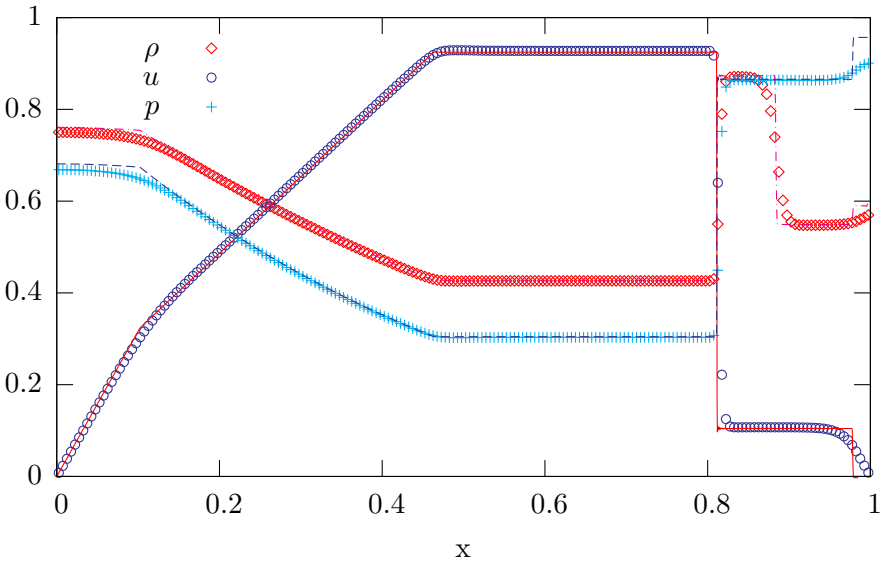

Abbildung 16: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1$ damit identisch mit Minmod. Zeit: $t = 0.5$.

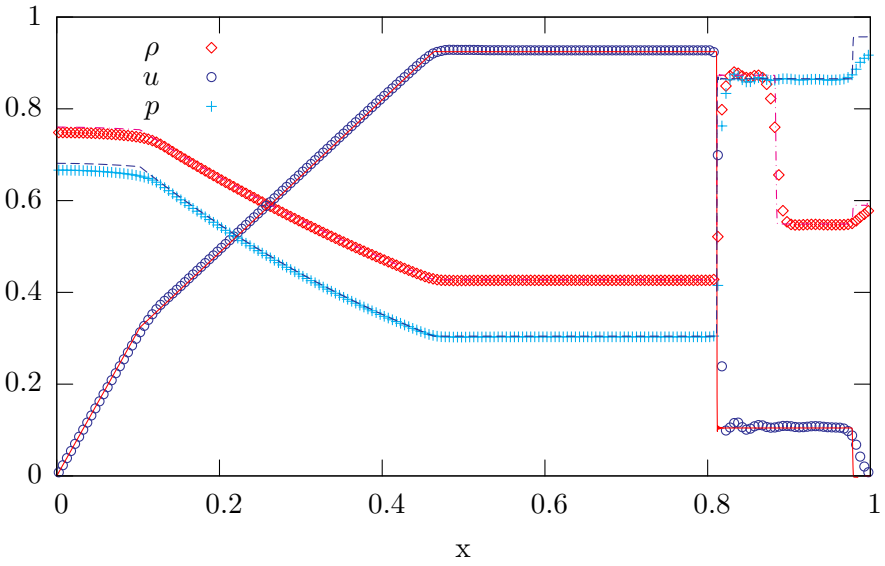

Abbildung 17: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1.25$. Zeit: $t = 0.5$.

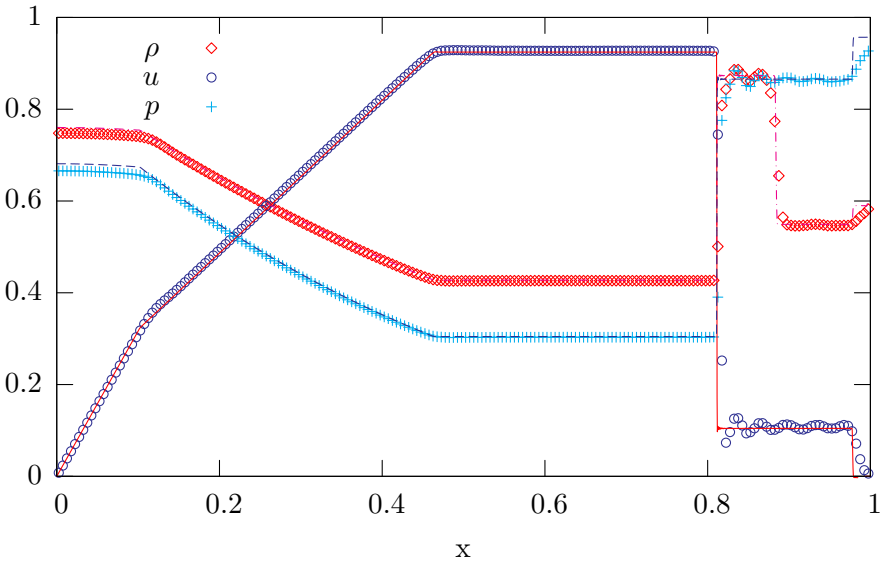

Abbildung 18: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1.5$. Zeit: $t = 0.5$.

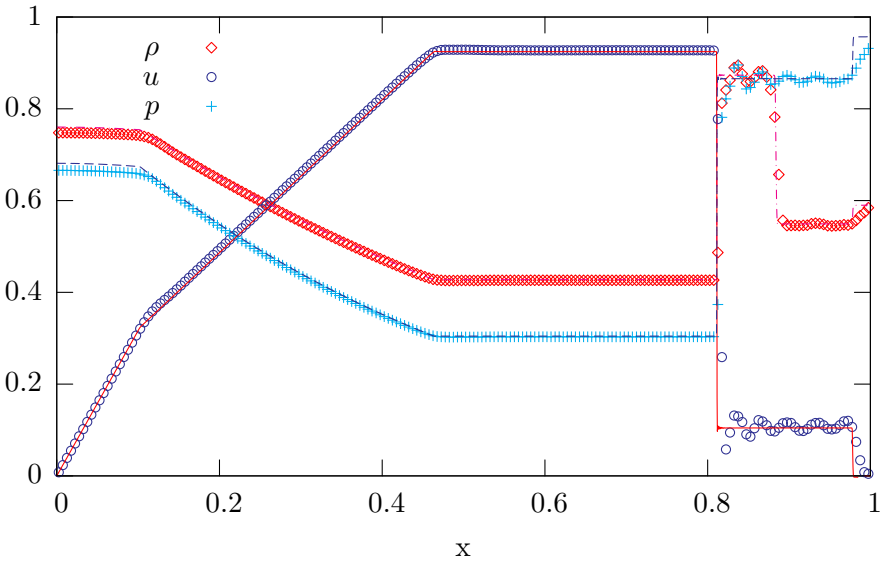

Abbildung 19: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 1.75$. Zeit: $t = 0.5$.

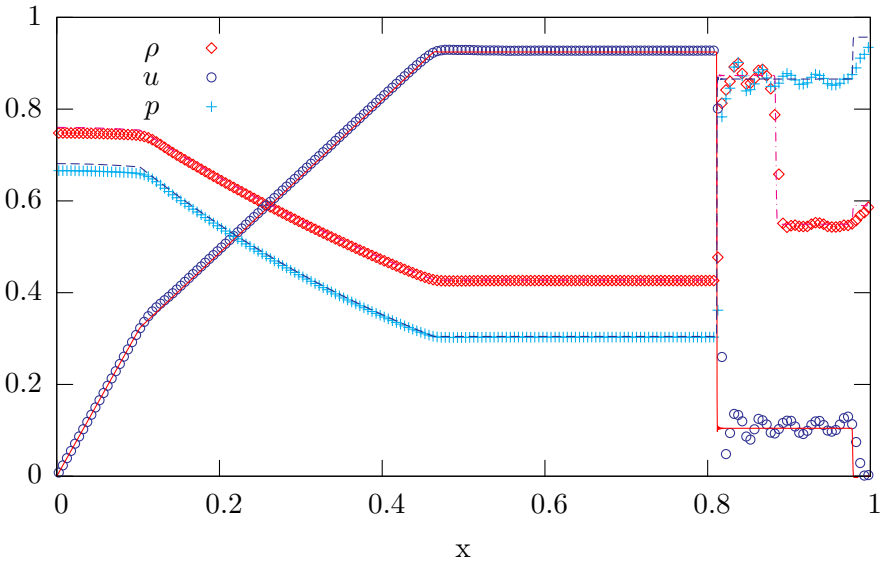

Abbildung 20: Limiter: Anpassbarer Limiter mit Parameter $p = 2$ damit identisch mit Superbee. Zeit: $t = 0.5$.

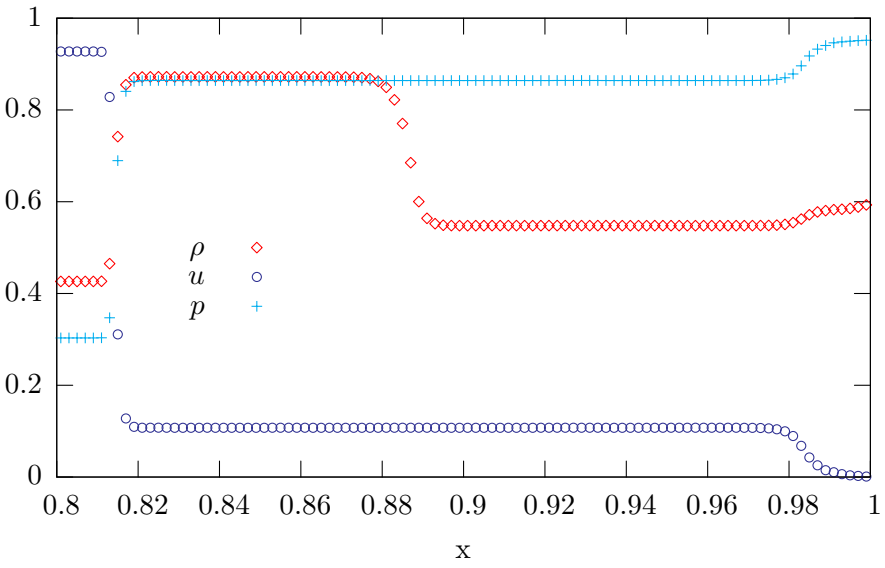

Abbildung 21: Ausschnitt des Überlagerungsbereichs nach der Reflexion erzeugt mit anpassbarem Limiter mit $p = 1.25$ und 500 Gitterzellen ($\Delta x = 0.002$). Zeit: $t = 0.5$.

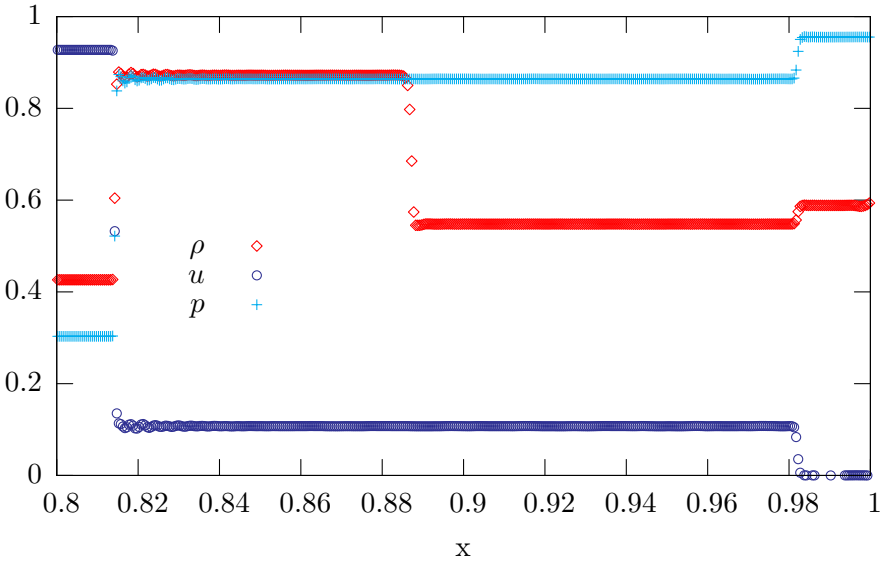

Abbildung 22: Ausschnitt des Überlagerungsberechs nach der Reflexion erzeugt mit Superbee Limiter und 2000 Gitterzellen ($\Delta x = 0.0005$). Zeit: $t = 0.5$.

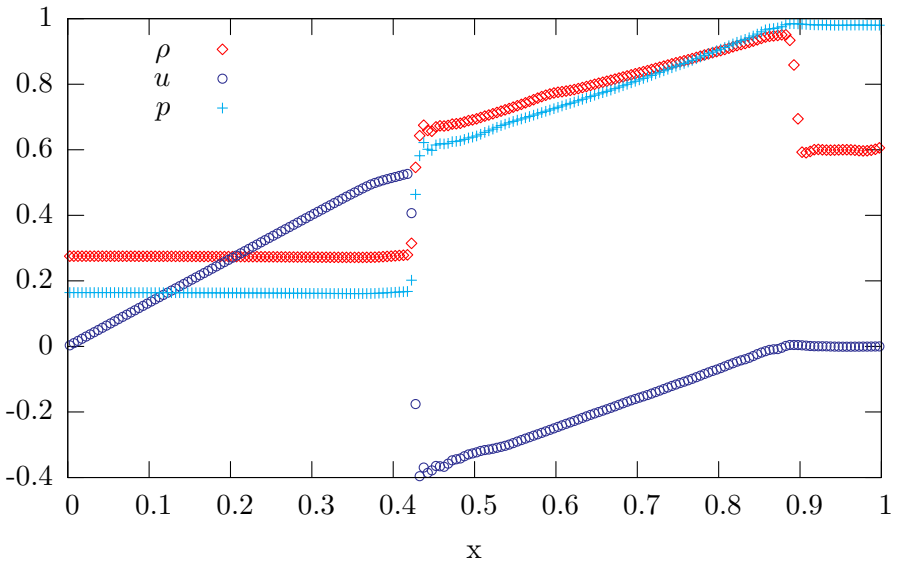

Abbildung 23: Numerische Lösung der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t = 1$ mit Superbee Limiter. Die Oszillationen sind deutlich geringer als zum Zeitpunkt $t = 0.5$

4.5 Ergebnisse für große Zeiten

Es wurde eine Animation erstellt, die den Verlauf der der Schockwelle bis zum Zeitpunkt $t = 4$ darstellt. Man stellt dabei fest, dass die Oszillationen die nach der Reflexion an der Wand auftreten, nachdem die reflektierte Schockwelle das halbe Stoßrohr durchquert hat, stark nachlassen. Kurz bevor die Schockwelle an der linken Wand ankommt gibt es praktisch keine Oszillationen mehr. Sobald die Schockwelle jedoch zum zweiten mal reflektiert wird entstehen im neuen Überlagerungsbereich wieder Oszillationen. Bis zum Zeitpunkt $t = 4$ wird die Schockwelle 3 mal reflektiert. Das eben beschriebene Verhalten ist bei jeder Reflexion zu erkennen. Da es schwierig, ist Animationen in ausdruckbare Dokumente einzubinden, muss hier Abbildung 23 genügen um das geschilderte Verhalten zu verdeutlichen. Man sieht in Abbildung 23 das Gitter zum Zeitpunkt $t = 1$ berechnet mit dem Superbee Limiter; im Vergleich zum Zeitpunkt $t = 0.5$ (Abbildung 20 sind die Oszillationen fast nicht mehr vorhanden. Die anderen Limiter zeigen bei $t = 1$ noch geringere Oszillationen oder gar keine.

5 Schlussfolgerungen

Es gibt drei klare Trends für Simulationen, die Reflexionen mit „Limited Slopes“ Methoden berechnen:

1. Je besser die numerischen Methoden in der Lage sind, den unstetigen Änderungen im Verlauf der Zustandsgrößen Dichte ρ, Geschwindigkeit u und Druck p zu folgen, desto stärker sind die Oszillationen nach der Reflexion. So zeigen zum Bei-

spiel das Upwind Verfahren erster Ordnung oder der Minmod Limiter überhaupt keine Oszillationen, während der Superbee Limiter besonders starke zeigt. Besonders deutlich wird der Zusammenhang beim anpassbaren Limiter. Lässt man den Parameter p von 1 (Minmod) bis 2 (Superbee) laufen kann die numerische Lösung einerseits immer besser dem „kantigen“ Verlauf der hochauflösenden Lösung folgen doch andererseits wachsen die Oszillationen von „gar nicht vorhanden“ bei $p = 1$ bis zu den stärksten aller benutzter Limiter bei $p = 2$ an.

2. Wird die Zahl der Gitterzellen bzw. die Gitterauflösung erhöht, werden die Amplituden der Oszillationen immer kleiner und sie räumlich auf einen kleineren Bereich beschränkt. Es ist möglich durch eine entsprechende Erhöhung der Gitterzellen die Oszillationen ganz verschwinden zu lassen. Dabei gilt: Je kleiner die Oszillationen sind desto geringer muss die Anzahl der Gitterzellen gewählt werden um sie verschwinden zu lassen.

3. Einige Zeit nach der Reflexion verschwinden die dabei entstandenen Oszillationen wieder. Diese Zeit entspricht bei denen in dieser Studienarbeit gewählten Anfangsbedingungen etwas mehr als einem halben Durchlauf des Schocks durch das Stoßrohr

Daraus lässt sich Folgendes ableiten:

1. Will man die nach der Reflexion auftretenden Oszillationen ganz vermeiden, muss man Limiter wählen, die weiche Übergange in den Lösungen produzieren, wie zum Beispiel der Minmod Limiter. Bei Problemen wie Schocks in denen starke Unstetigkeiten und vorkommen, führt das zu schlechteren Ergebnissen als bei Limitern die besonders harte Übergänge in den Lösungen erzeugen. Man muss deswegen aber bei der Simulation von Schocks nicht vom MUSCL Schema mit Minmod limited Slopes abraten, da es immer noch deutlich bessere Ergebnisse als zum Beispiel das einfache Upwind-Verfahren liefert.

2. Man kann zwar bei den Limitern die härtere Übergänge als Minmod erzeugen durch eine größere Zahl von Gitterzellen die Reflexionsoszillationen verkleinern, allerdings ist das für viele reale Anwendungen keine gute Herangehensweise. Bei diesen wird immer versucht mit so wenig Gitterzellen wie möglich zu arbeiten um den Rechenaufwand klein zu halten. Wenn man allerdings sowieso mit hoher Gitterauflösung arbeitet, kann man auch Limiter benutzen, die unstetigen Übergängen besser folgen können.

3. Da die unphysikalischen Oszillationen, die nach der Reflexion auftreten, vom MUSCL Verfahren nach einiger Zeit wieder weggedämpft werden, muss auf diese keine Rücksicht genommen werden, wenn man nur an Ergebnissen lange nach einer Reflexion interessiert ist. Man kann also in diesem Fall auch Limiter benutzen, die harte Übergänge in den Lösungen gut berechnen, auch wenn sie starke Oszillationen verursachen, da auch diese nach einer gewissen Zeit vollständig weggedämpft werden.

Literatur

[1] J. Naber: Building your own shock tube. ISSN 1386-3703, 2005, Stichting Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam

[2] G. A. Sod: A Survery of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Convservations Laws. J. Comput. Phys., 27:1-31, 1978

[3] E. F. Toro: Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics - A Practical Introduction. 2nd Edition, 1999, Springer

[4] P. L. Roe: Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. J. Comput. Phys., 43:357-372, 1981

[5] S. Paardekooper and G. Mellema: RODEO: a new mehtod for planet-disk interaction, Astronomy & Astrophysics 405, 1203, 2006