

EBERHARD KARLS  
UNIVERSITÄT  
TÜBINGEN



# Numerische Simulation von Streuprozessen

Bertram Bitsch und Moritz Nadler

Fakultät für Mathematik und Physik

Universität Tübingen



## Überblick

### ● Gliederung

Streuung und Streuphasen

---

Berechnung der Streuphasen

---

Born'sche Näherung

---

Streuquerschnitt

---

Rückblick

---

# Überblick



# Gliederung

Überblick

● Gliederung

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

## ■ Streuung und Streuphasen



# Gliederung

Überblick

● Gliederung

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Streuung und Streuphasen
- Berechnung der Streuphase



# Gliederung

Überblick

● Gliederung

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Streuung und Streuphasen
- Berechnung der Streuphase
- Born'sche Näherung



# Gliederung

Überblick

● Gliederung

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Streuung und Streuphasen
- Berechnung der Streuphase
- Born'sche Näherung
- Streuquerschnitt



Überblick

---

Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

Berechnung der Streuphasen

---

Born'sche Näherung

---

Streuquerschnitt

---

Rückblick

---

# Streuung und Streuphasen



# Anschauliche Beschreibung

Überblick

---

Streuung und Streuphasen

● **Anschauliche Beschreibung**

● Mathematische Beschreibung

● Streuquerschnitt

● Streuamplitude

● Streuphase

Berechnung der Streuphasen

---

Born'sche Näherung

---

Streuquerschnitt

---

Rückblick

---

## ■ Streuung : Aufschluss über Aufbau der Materie



# Anschauliche Beschreibung

Überblick

---

Streuung und Streuphasen

● **Anschauliche Beschreibung**

● Mathematische Beschreibung

● Streuquerschnitt

● Streuamplitude

● Streuphase

Berechnung der Streuphasen

---

Born'sche Näherung

---

Streuquerschnitt

---

Rückblick

---

- Streuung : Aufschluss über Aufbau der Materie
- Einlaufende Wellenfunktion wird am Potential gestreut  
⇒ Überlagerung aus gestreuter und ungestreuter Wellenfunktion



# Anschauliche Beschreibung

Überblick

Streuung und Streuphasen

● **Anschauliche Beschreibung**

● Mathematische Beschreibung

● Streuquerschnitt

● Streuamplitude

● Streuphase

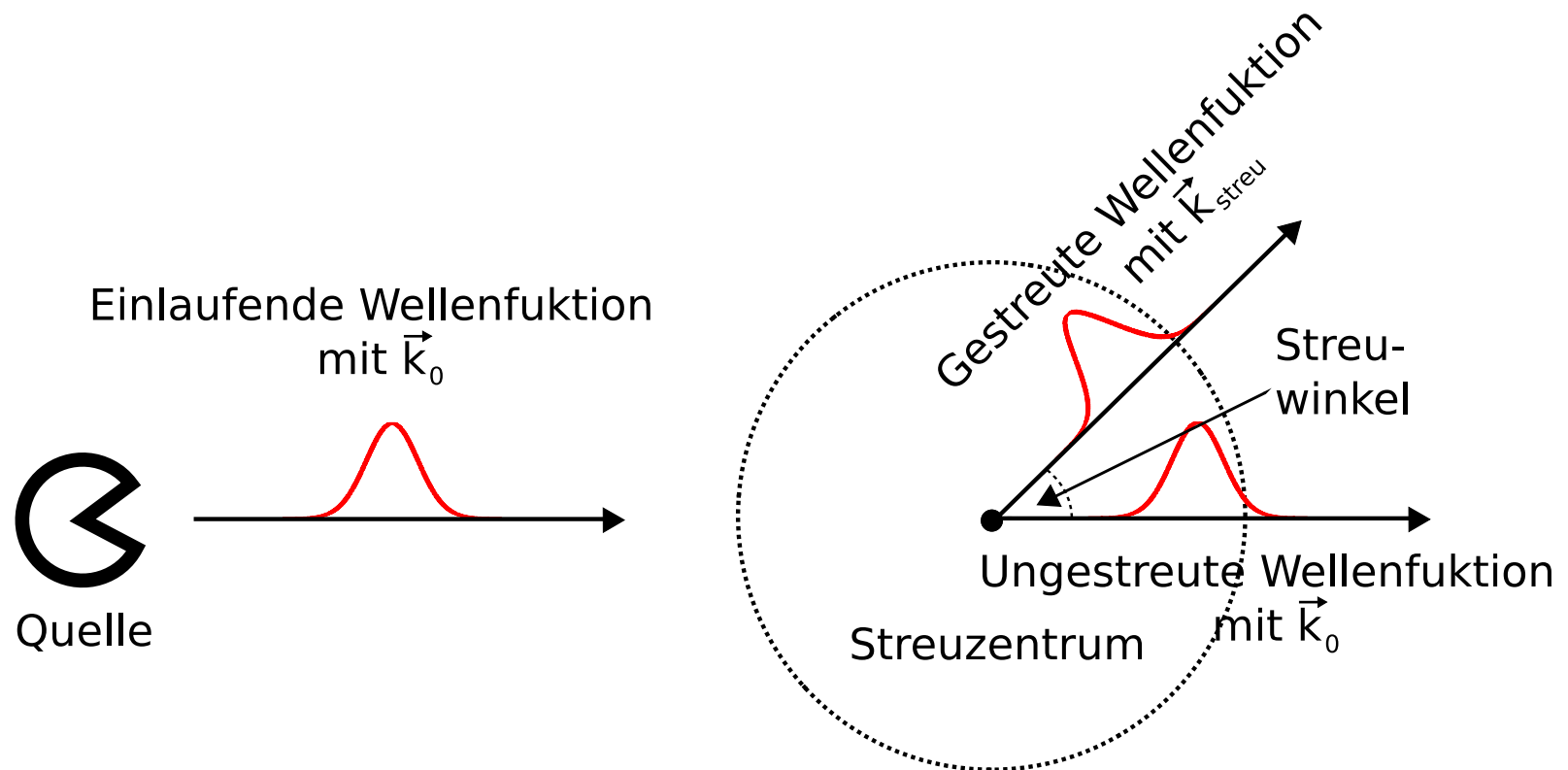
Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Streuung : Aufschluss über Aufbau der Materie
- Einlaufende Wellenfunktion wird am Potential gestreut  
⇒ Überlagerung aus gestreuter und ungestreuter Wellenfunktion





Überblick

Streuung und Streuphasen

● Anschauliche Beschreibung

● **Mathematische Beschreibung**

● Streuquerschnitt

● Streuamplitude

● Streuphase

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

## ■ Einlaufende Welle:

$$\phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$$

# Mathematische Beschreibung

## Überblick

### Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung

- **Mathematische Beschreibung**

- Streuquerschnitt

- Streuamplitude

- Streuphase

### Berechnung der Streuphasen

### Born'sche Näherung

### Streuquerschnitt

### Rückblick

## ■ Einlaufende Welle:

$$\phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$$

## ■ Ansatz führt zur Lösung des Problems durch stationäre Schrödinger Gleichung.

# Mathematische Beschreibung

## Überblick

### Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung

- **Mathematische Beschreibung**

- Streuquerschnitt

- Streuamplitude

- Streuphase

### Berechnung der Streuphasen

### Born'sche Näherung

### Streuquerschnitt

### Rückblick

## ■ Einlaufende Welle:

$$\phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_0\vec{r}}$$

## ■ Ansatz führt zur Lösung des Problems durch stationäre Schrödinger Gleichung.

## ■ Wellenfunktion nach der Streuung:

⇒ Überlagerung aus einlaufender und auslaufender Welle:

$$\psi_{\vec{k}_0} = \phi_{\vec{k}_0}(\vec{r}) + f_{\vec{k}_0}(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

## ■ Streuamplitude:

$$f_{\vec{k}_0}(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}_{\text{Streu}}\vec{x}'} V(\vec{x}) \psi_{\vec{k}_0}(\vec{x}')$$



# Streuquerschnitt

Überblick

Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

## ■ Differentieller Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{N_{\text{ein}}d\Omega}$$

# Streuquerschnitt

Überblick

Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Differentieller Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{N_{\text{ein}}d\Omega}$$

- Zahl der einfallenden Teilchen:

$$N_{\text{ein}} = \frac{\hbar k_0}{m} \int dt |\psi_0(\vec{x}_{\text{Quelle}}, t)|^2$$

- Zahl der ins Winkelement  $d\Omega$  gestreuten Teilchen:

$$dN(\Omega) = |f_{\vec{k}_0}(\Omega)|^2 d\Omega \frac{\hbar k_0}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt |\psi_0(\hat{k}_0 r, t)|^2$$

# Streuquerschnitt

Überblick

Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Differentieller Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{N_{\text{ein}}d\Omega}$$

- Zahl der einfallenden Teilchen:

$$N_{\text{ein}} = \frac{\hbar k_0}{m} \int dt |\psi_0(\vec{x}_{\text{Quelle}}, t)|^2$$

- Zahl der ins Winkelelement  $d\Omega$  gestreuten Teilchen:

$$dN(\Omega) = |f_{\vec{k}_0}(\Omega)|^2 d\Omega \frac{\hbar k_0}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt |\psi_0(\hat{k}_0 r, t)|^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\vec{k}_0}(\theta, \varphi)|^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \int d\Omega |f_{\vec{k}_0}(\theta, \varphi)|^2$$

# Streuamplitude

## Überblick

### Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

### Berechnung der Streuphasen

### Born'sche Näherung

### Streuquerschnitt

### Rückblick

- Entwicklung der Streuamplitude nach Kugelfunktionen

$$f_k(\theta, \varphi) = f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta)$$

- Partialwellenamplituden

$$f_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k}$$

# Streuamplitude

Überblick

Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Entwicklung der Streuamplitude nach Kugelfunktionen

$$f_k(\theta, \varphi) = f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta)$$

- Partialwellenamplituden

$$f_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k}$$

- Streuamplitude

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

# Streuamplitude

## Überblick

### Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

### Berechnung der Streuphasen

### Born'sche Näherung

### Streuquerschnitt

### Rückblick

- Entwicklung der Streuamplitude nach Kugelfunktionen

$$f_k(\theta, \varphi) = f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta)$$

- Partialwellenamplituden

$$f_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k}$$

- Streuamplitude

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin \delta_l \sin \delta_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta')$$



# Anschauliche Betrachtung der Streuphase

Überblick

Streuung und Streuphasen

- Anschauliche Beschreibung
- Mathematische Beschreibung
- Streuquerschnitt
- Streuamplitude
- Streuphase

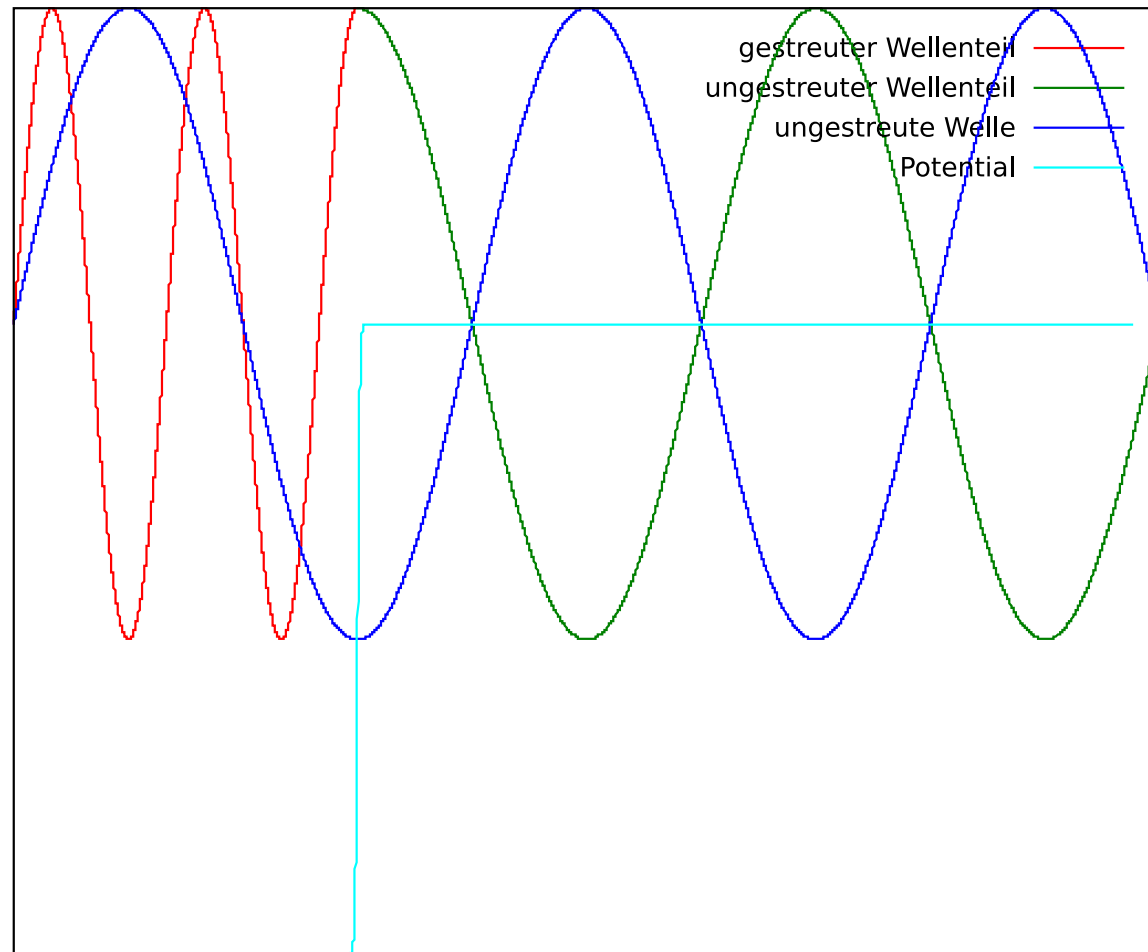
Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Streuphase  $\delta_l$ : Phasendifferenz zwischen gestreuter und ungestreuter Welle





Überblick

---

Streuung und Streuphasen

---

Berechnung der Streuphasen

- Numerische Anpassung
- Streuung
- Veranschaulichung
- Berechnung der Streuphase
- Abhängigkeit von  $R$
- Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

---

Streuquerschnitt

---

Rückblick

---

# Berechnung der Streuphasen

# Numerische Anpassung



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

● Streuung

● Veranschaulichung

● Berechnung der Streuphase

● Abhängigkeit von  $R$

● Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Einlaufende Welle:  $E > 0$   
⇒ Kontinuum an Energien

# Numerische Anpassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

- Streuung
- Veranschaulichung
- Berechnung der Streuphase
- Abhängigkeit von  $R$
- Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Einlaufende Welle:  $E > 0$   
⇒ Kontinuum an Energien
- Numerisch: Anpassung an Box mit endlichem  $R = 20 \text{ fm}$   
⇒ nur diskrete Energien möglich!  
⇒ Eigenenergien  $E_{\vec{k}}$  des Hamilton Operators

# Numerische Anpassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

● Streuung

● Veranschaulichung

● Berechnung der Streuphase

● Abhängigkeit von  $R$

● Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Einlaufende Welle:  $E > 0$   
⇒ Kontinuum an Energien
- Numerisch: Anpassung an Box mit endlichem  $R = 20 \text{ fm}$   
⇒ nur diskrete Energien möglich!  
⇒ Eigenenergien  $E_{\vec{k}}$  des Hamilton Operators
- Einlaufende Welle entspricht der ungestreuten Welle

# Numerische Anpassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

● Streuung

● Veranschaulichung

● Berechnung der Streuphase

● Abhängigkeit von  $R$

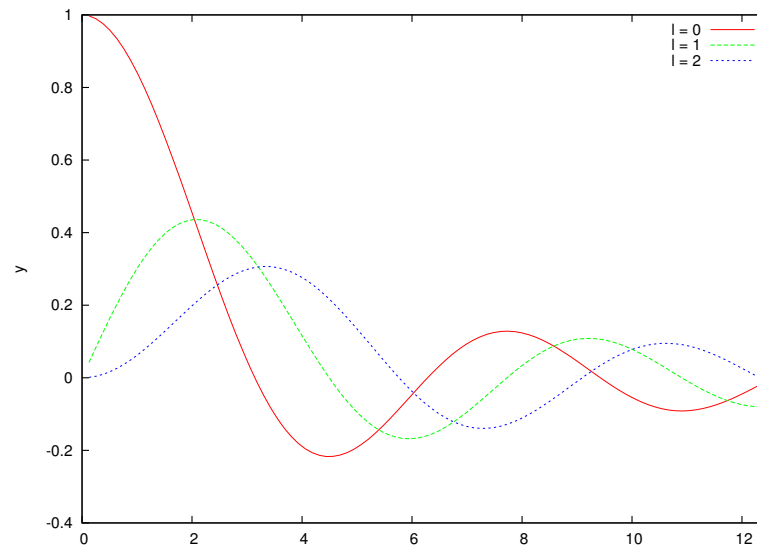
● Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Einlaufende Welle:  $E > 0$   
⇒ Kontinuum an Energien
- Numerisch: Anpassung an Box mit endlichem  $R = 20 \text{ fm}$   
⇒ nur diskrete Energien möglich!  
⇒ Eigenenergien  $E_{\vec{k}}$  des Hamilton Operators
- Einlaufende Welle entspricht der ungestreuten Welle
- Darstellung des Radialteils durch sphärische Besselfunktionen  $j_l$



# Streuung am Wood Saxon Potential



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

● **Streuung**

● Veranschaulichung

● Berechnung der Streuphase

● Abhängigkeit von  $R$

● Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

## ■ Wood-Saxon-Potential:

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a_0}\right)}$$

mit

- ◆ Potentialtiefe:  $V_0 = -40 \text{ MeV}$
- ◆ Radius:  $r_0 = 3 \text{ fm}$
- ◆ Oberflächendicke:  $a_0 = 0.5 \text{ fm}$

# Streuung am Wood Saxon Potential



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

● **Streuung**

● Veranschaulichung

● Berechnung der Streuphase

● Abhängigkeit von  $R$

● Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

## ■ Wood-Saxon-Potential:

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-r_0}{a_0}\right)}$$

mit

- ◆ Potentialtiefe:  $V_0 = -40 \text{ MeV}$
- ◆ Radius:  $r_0 = 3 \text{ fm}$
- ◆ Oberflächendicke:  $a_0 = 0.5 \text{ fm}$

## ■ Wood-Saxon-Potential zusätzlich zu Box

⇒ Eigenfunktionen des Gesamtpotentials entsprechen der gestreuten Wellenfunktion



# Veranschaulichung des Potentials

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

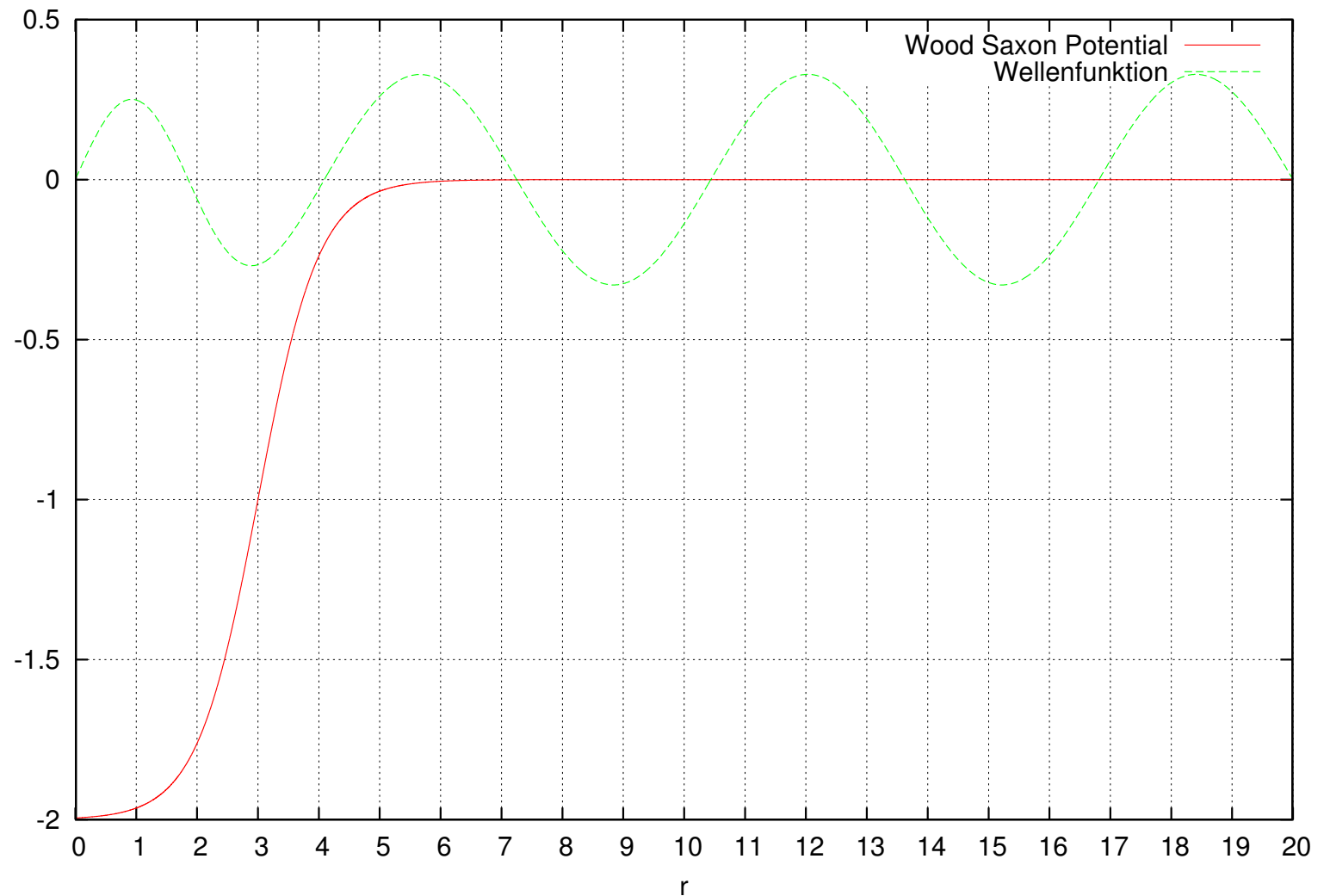
- Numerische Anpassung
- Streuung
- Veranschaulichung
- Berechnung der Streuphase
- Abhängigkeit von  $R$
- Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

Wood Saxon Potential mit Wellenfunktion



# Berechnung der Streuphase



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

- Numerische Anpassung
- Streuung
- Veranschaulichung
- Berechnung der Streuphase
- Abhängigkeit von  $R$
- Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Ungestreute Wellenfunktion (wegen Box):

$$\psi_{\text{ungestreu}}(r = R) = j_l(k_{il}R) = 0$$

# Berechnung der Streuphase

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

- Numerische Anpassung
- Streuung
- Veranschaulichung
- Berechnung der Streuphase
- Abhängigkeit von  $R$
- Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Ungestrene Wellenfunktion (wegen Box):

$$\psi_{\text{ungestret}}(r = R) = j_l(k_{il}R) = 0$$

- Durch Vergleich der Argumente der Wellenfunktionen bei  $r = R$  errechnet sich die Phasendifferenz  $\delta_l$

# Berechnung der Streuphase

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

● Streuung

● Veranschaulichung

● Berechnung der Streuphase

● Abhängigkeit von  $R$

● Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Ungestreute Wellenfunktion (wegen Box):

$$\psi_{\text{ungestret}}(r = R) = j_l(k_{il}R) = 0$$

- Durch Vergleich der Argumente der Wellenfunktionen bei  $r = R$  errechnet sich die Phasendifferenz  $\delta_l$

- Beispiel für  $l = 0$ :

$$\begin{aligned}\sin(kR + \delta_l) &= \sin(\underbrace{\alpha}_{=n\pi}) = 0 \\ \Rightarrow \delta_l &= n\pi - kR\end{aligned}$$

# Berechnung der Streuphase

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

● Numerische Anpassung

● Streuung

● Veranschaulichung

● Berechnung der Streuphase

● Abhängigkeit von  $R$

● Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

- Ungestreute Wellenfunktion (wegen Box):

$$\psi_{\text{ungestreut}}(r = R) = j_l(k_{il}R) = 0$$

- Durch Vergleich der Argumente der Wellenfunktionen bei  $r = R$  errechnet sich die Phasendifferenz  $\delta_l$

- Beispiel für  $l = 0$ :

$$\begin{aligned}\sin(kR + \delta_l) &= \sin(\underbrace{\alpha}_{=n\pi}) = 0 \\ \Rightarrow \delta_l &= n\pi - kR\end{aligned}$$

- Für  $l > 0$ :  $\alpha$  entspricht dem Abstand der Nullstellen der zugehörigen Besselfunktion

# Abhängigkeit der Streuphase von R



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

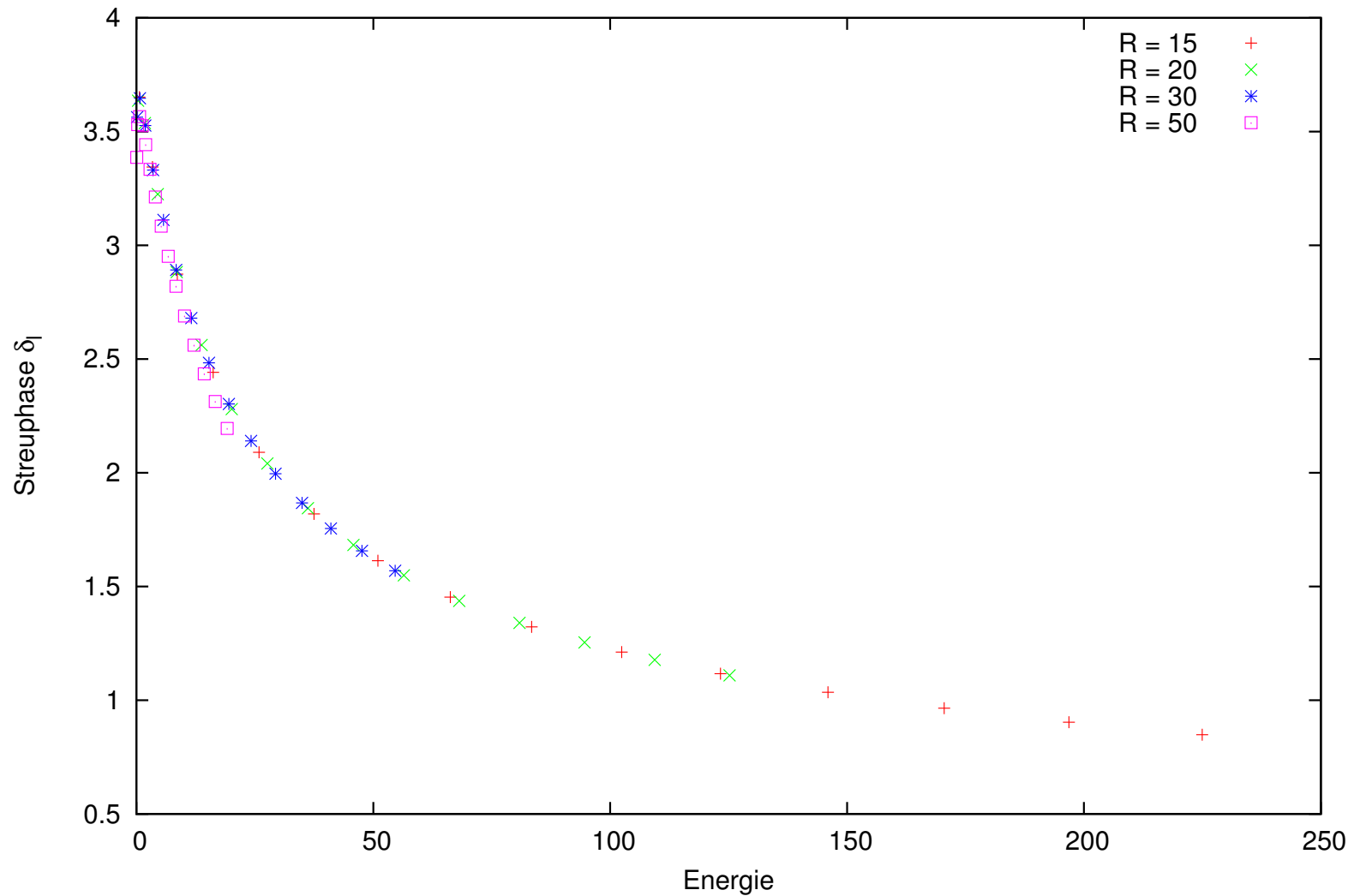
- Numerische Anpassung
- Streuung
- Veranschaulichung
- Berechnung der Streuphase
- **Abhängigkeit von R**
- Abhängigkeit von l

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

Streuphase in Abhängigkeit der Energie für  $l = 0$  und sich änderndes R





# Abhängigkeit der Streuphase von $l$

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

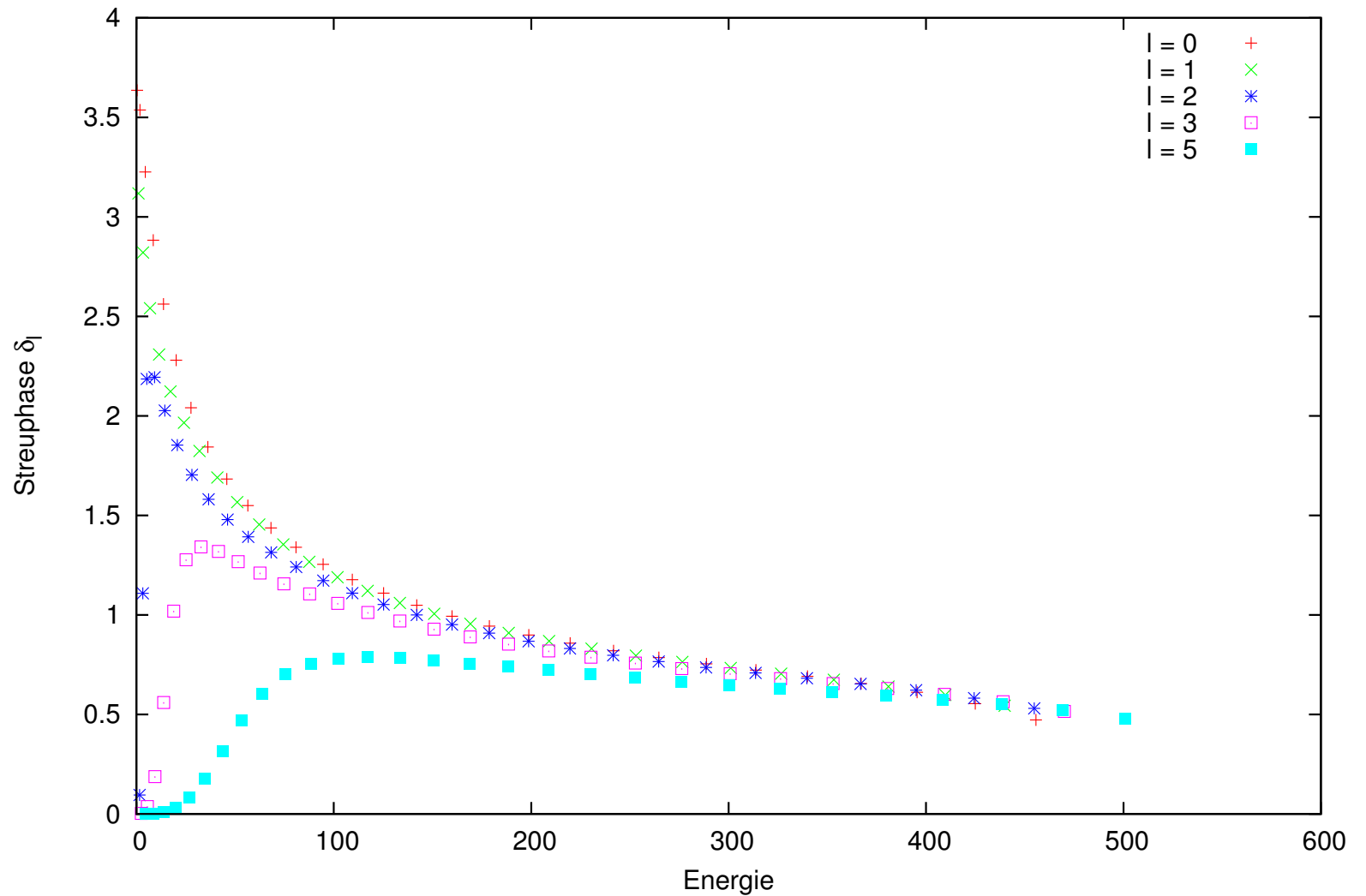
- Numerische Anpassung
- Streuung
- Veranschaulichung
- Berechnung der Streuphase
- Abhängigkeit von  $R$
- Abhängigkeit von  $l$

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

Streuphase in Abhängigkeit der Energie für das Wood Saxon Potential





Überblick

---

Streuung und Streuphasen

---

Berechnung der Streuphasen

---

Born'sche Näherung

- Herleitung
- Gültigkeit
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich

Streuquerschnitt

---

Rückblick

---

# Born'sche Näherung

# Herleitung der Born'schen Näherung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- Für die Streuamplitude gilt:

$$\begin{aligned} f_k(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} V(r') \psi_{\vec{k}}(\vec{x}') \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \int dr r^2 V(r) j_l(kr) R_l(r) \end{aligned}$$

# Herleitung der Born'schen Näherung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- Für die Streuamplitude gilt:

$$\begin{aligned} f_k(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} V(r') \psi_{\vec{k}}(\vec{x}') \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \int dr r^2 V(r) j_l(kr) R_l(r) \end{aligned}$$

- Durch Vergleich folgt für die Partialwellenamplitude:

$$f_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int dr r^2 V(r) j_l(kr) R_l(r)$$

# Herleitung der Born'schen Näherung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- Für die Streuamplitude gilt:

$$\begin{aligned} f_k(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} V(r') \psi_{\vec{k}}(\vec{x}') \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \int dr r^2 V(r) j_l(kr) R_l(r) \end{aligned}$$

- Durch Vergleich folgt für die Partialwellenamplitude:

$$f_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int dr r^2 V(r) j_l(kr) R_l(r)$$

- Für schwaches Potential:

$$R_l \approx j_l(kr) \text{ und } \delta_l \approx k f_l$$

# Herleitung der Born'schen Näherung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- Für die Streuamplitude gilt:

$$\begin{aligned} f_k(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\vec{x}'} V(r') \psi_{\vec{k}}(\vec{x}') \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \int dr r^2 V(r) j_l(kr) R_l(r) \end{aligned}$$

- Durch Vergleich folgt für die Partialwellenamplitude:

$$f_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int dr r^2 V(r) j_l(kr) R_l(r)$$

- Für schwaches Potential:

$$R_l \approx j_l(kr) \text{ und } \delta_l \approx k f_l$$

- Born'sche Näherung:

$$\delta_l = -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dr r^2 V(r) [j_l(kr)]^2$$

# Gültigkeit der Born'schen Näherung



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- $\delta_l \approx k f_l$  gültig, wenn  $\psi_{\text{gestreut}} \approx \psi_{\text{ungestreut}}$   
⇒ nur gültig für schwache Potentiale



# Gültigkeit der Born'schen Näherung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- $\delta_l \approx k f_l$  gültig, wenn  $\psi_{\text{gestreut}} \approx \psi_{\text{ungestreut}}$   
 $\Rightarrow$  nur gültig für schwache Potentiale
- Realisierung von schwachen Potentialen:
  - ◆ kleine Potentialetiefe, d.h. kleines  $V_0$
  - ◆ großer Drehimpuls  $l$ , d.h. großer Abstand vom Potential

# Gültigkeit der Born'schen Näherung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

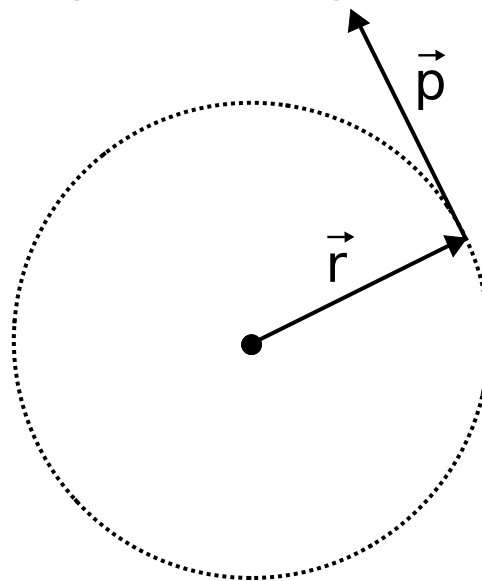
● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- $\delta_l \approx k f_l$  gültig, wenn  $\psi_{\text{gestreut}} \approx \psi_{\text{ungestreut}}$   
 $\Rightarrow$  nur gültig für schwache Potentiale

- Realisierung von schwachen Potentialen:
  - ◆ kleine Potentialetiefe, d.h. kleines  $V_0$
  - ◆ großer Drehimpuls  $l$ , d.h. großer Abstand vom Potential



klassisch  
 $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

# Gültigkeit der Born'schen Näherung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

● Vergleich

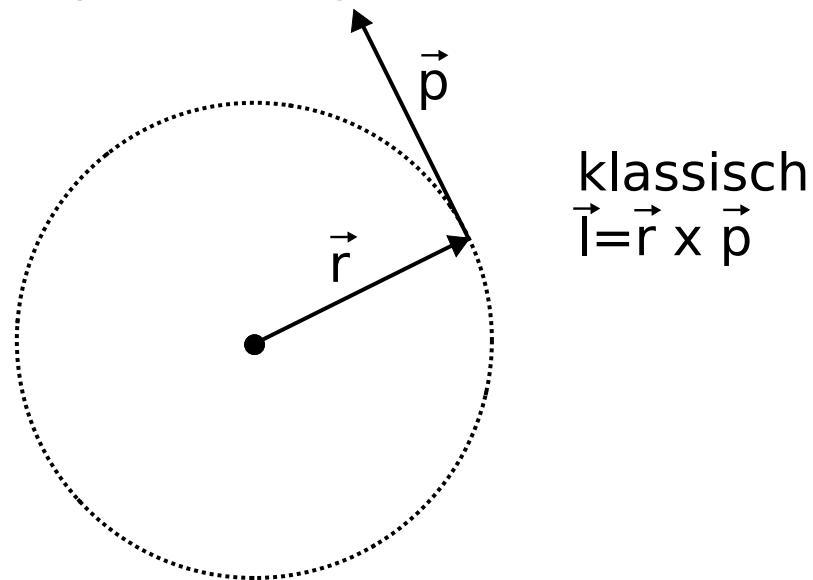
● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

- $\delta_l \approx k f_l$  gültig, wenn  $\psi_{\text{gestreut}} \approx \psi_{\text{ungestreut}}$   
 $\Rightarrow$  nur gültig für schwache Potentiale

- Realisierung von schwachen Potentialen:
  - ◆ kleine Potentiale tiefe, d.h. kleines  $V_0$
  - ◆ großer Drehimpuls  $l$ , d.h. großer Abstand vom Potential



- Vorteil: keine Berechnung der Lösung des Hamiltons notwendig



# Born'sche Näherung vs. exakter Lösung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

● Herleitung

● Gültigkeit

● Vergleich

● Vergleich

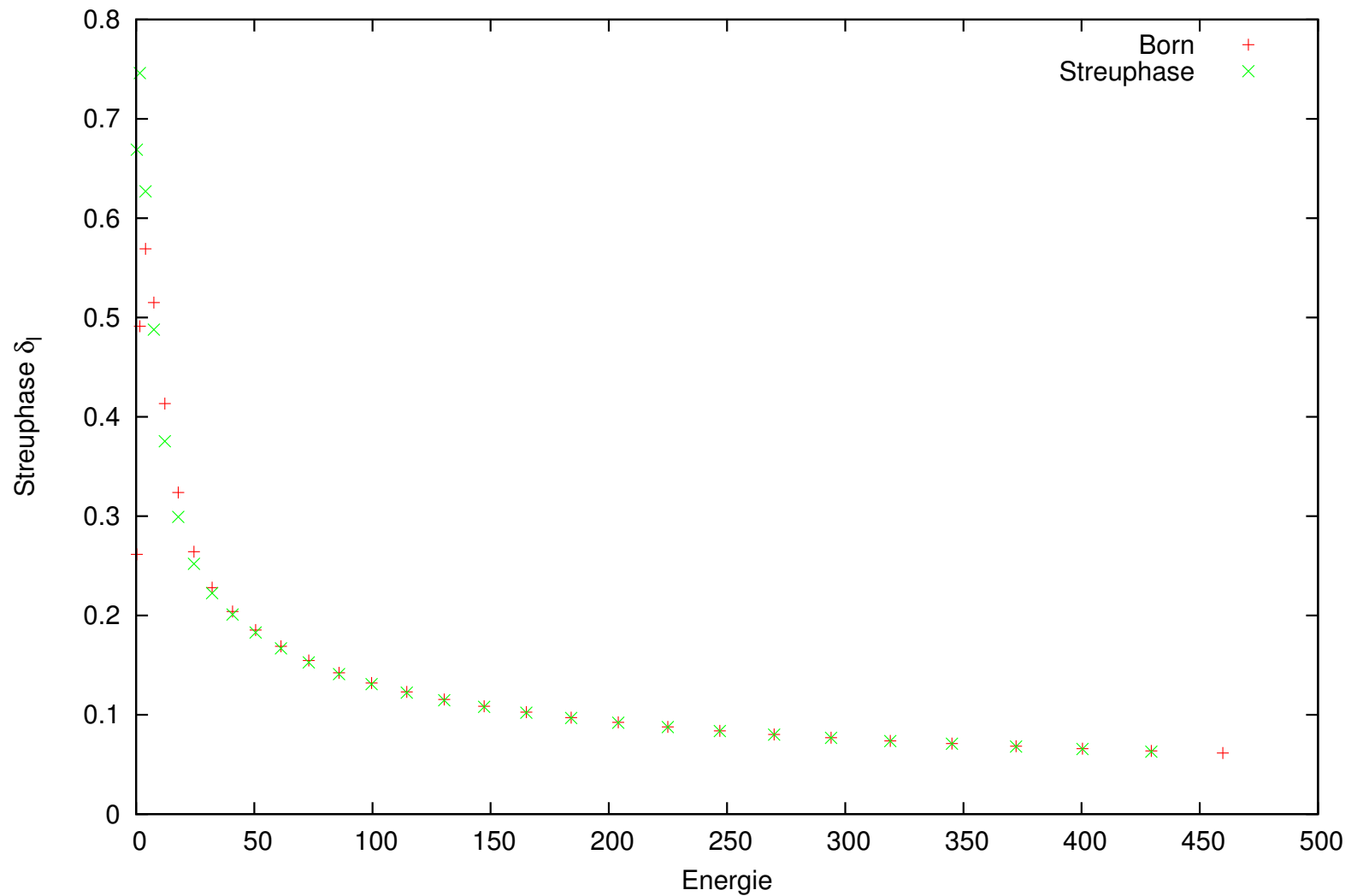
● Vergleich

● Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

Vergleich Born'sche Näherung mit exakter Streuphase für  $V = -4$  und  $l = 0$



# Born'sche Näherung vs. exakter Lösung



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

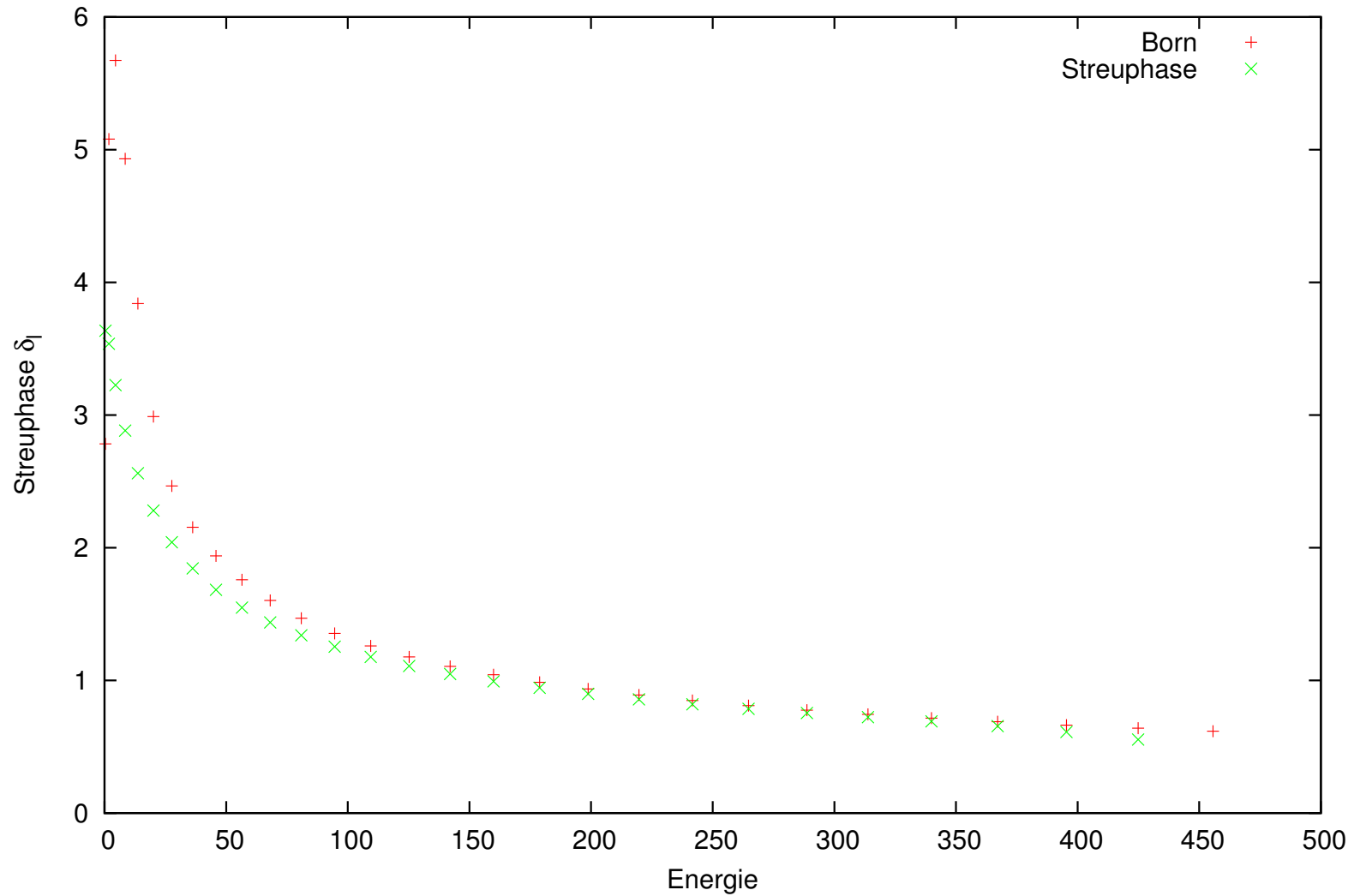
Born'sche Näherung

- Herleitung
- Gültigkeit
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

Vergleich Born'sche Näherung mit exakter Streuphase für  $V = -40$  und  $l = 0$





# Born'sche Näherung vs. exakter Lösung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

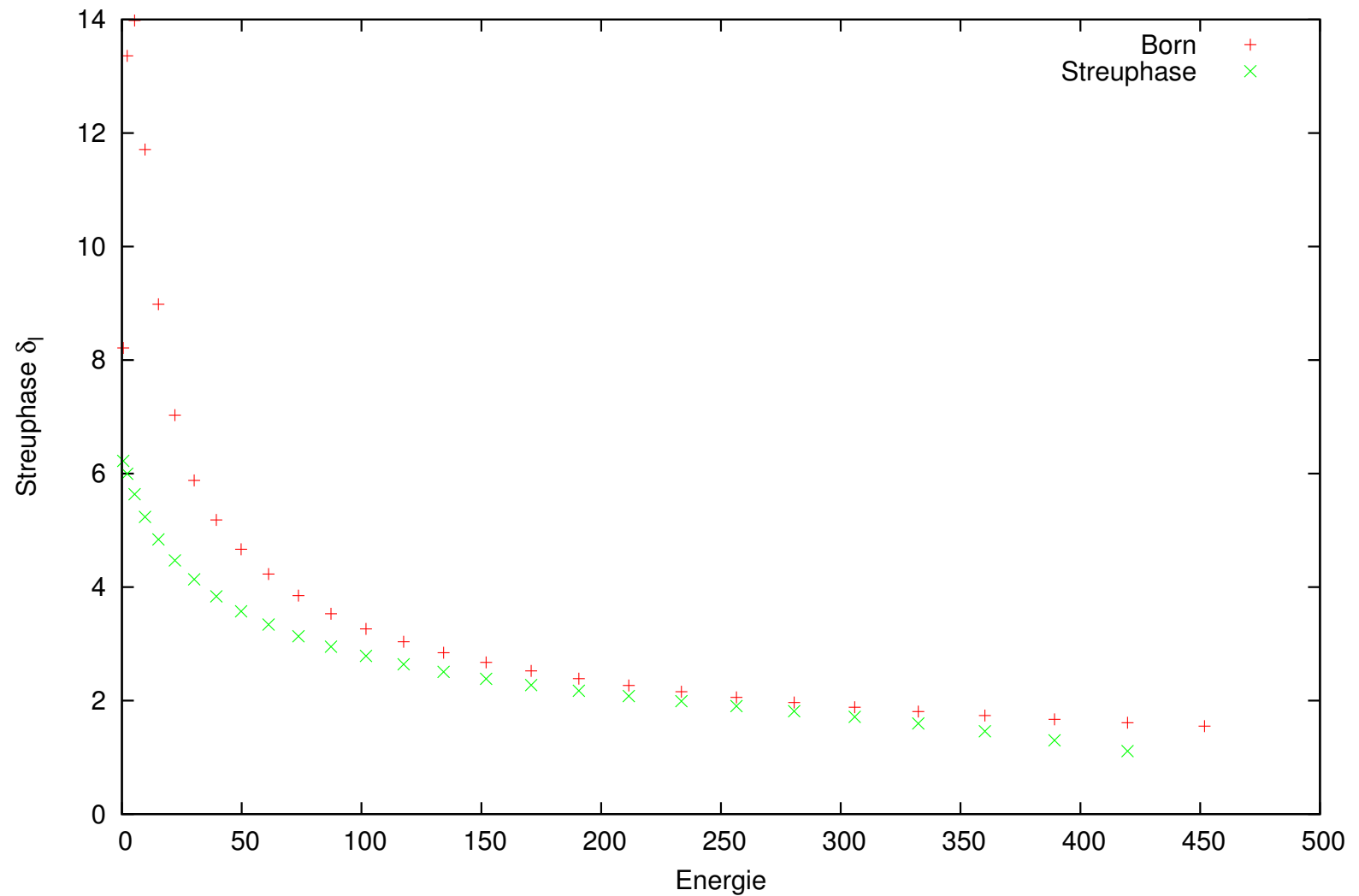
Born'sche Näherung

- Herleitung
- Gültigkeit
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

Vergleich Bornsche Näherung mit exakter Streuphase für  $V = -100$  und  $l = 0$





# Born'sche Näherung vs. exakter Lösung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

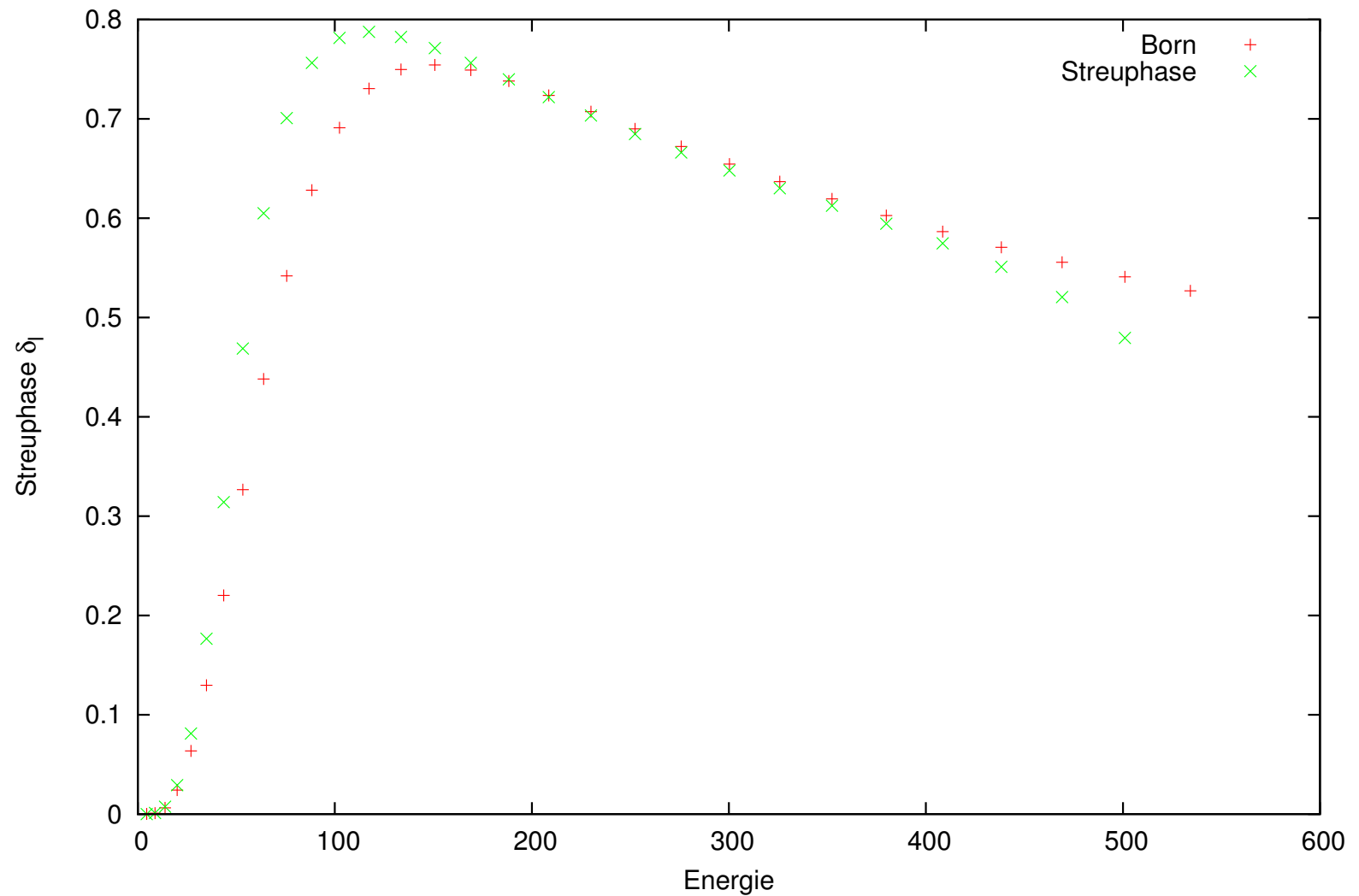
Born'sche Näherung

- Herleitung
- Gültigkeit
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich
- Vergleich

Streuquerschnitt

Rückblick

Vergleich Born'sche Näherung mit exakter Streuphase für  $V = -40$  und  $l = 5$





Überblick

---

Streuung und Streuphasen

---

Berechnung der Streuphasen

---

Born'sche Näherung

---

Streuquerschnitt

- Mathematische Betrachtung
- Abhängigkeit vom Drehimpuls
- Abhängigkeit von der Energie
- Abhängigkeit von der Energie

Rückblick

---

# Differentieller Streuquerschnitt

# Mathematische Betrachtung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

● Mathematische Betrachtung

● Abhängigkeit vom Drehimpuls

● Abhängigkeit von der Energie

● Abhängigkeit von der Energie

Rückblick

## ■ Differentieller Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{N_{\text{ein}}d\Omega}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin \delta_l \sin \delta_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta')$$

# Mathematische Betrachtung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

● Mathematische Betrachtung

● Abhängigkeit vom Drehimpuls

● Abhängigkeit von der Energie

● Abhängigkeit von der Energie

Rückblick

## ■ Differentieller Streuquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN(\Omega)}{N_{\text{ein}}d\Omega}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin \delta_l \sin \delta_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta')$$

## ■ Totaler Streuquerschnitt

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

## ■ Klassisch: Fläche des Streuobjekts

# Abhängigkeit vom Drehimpuls

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

● Mathematische Betrachtung

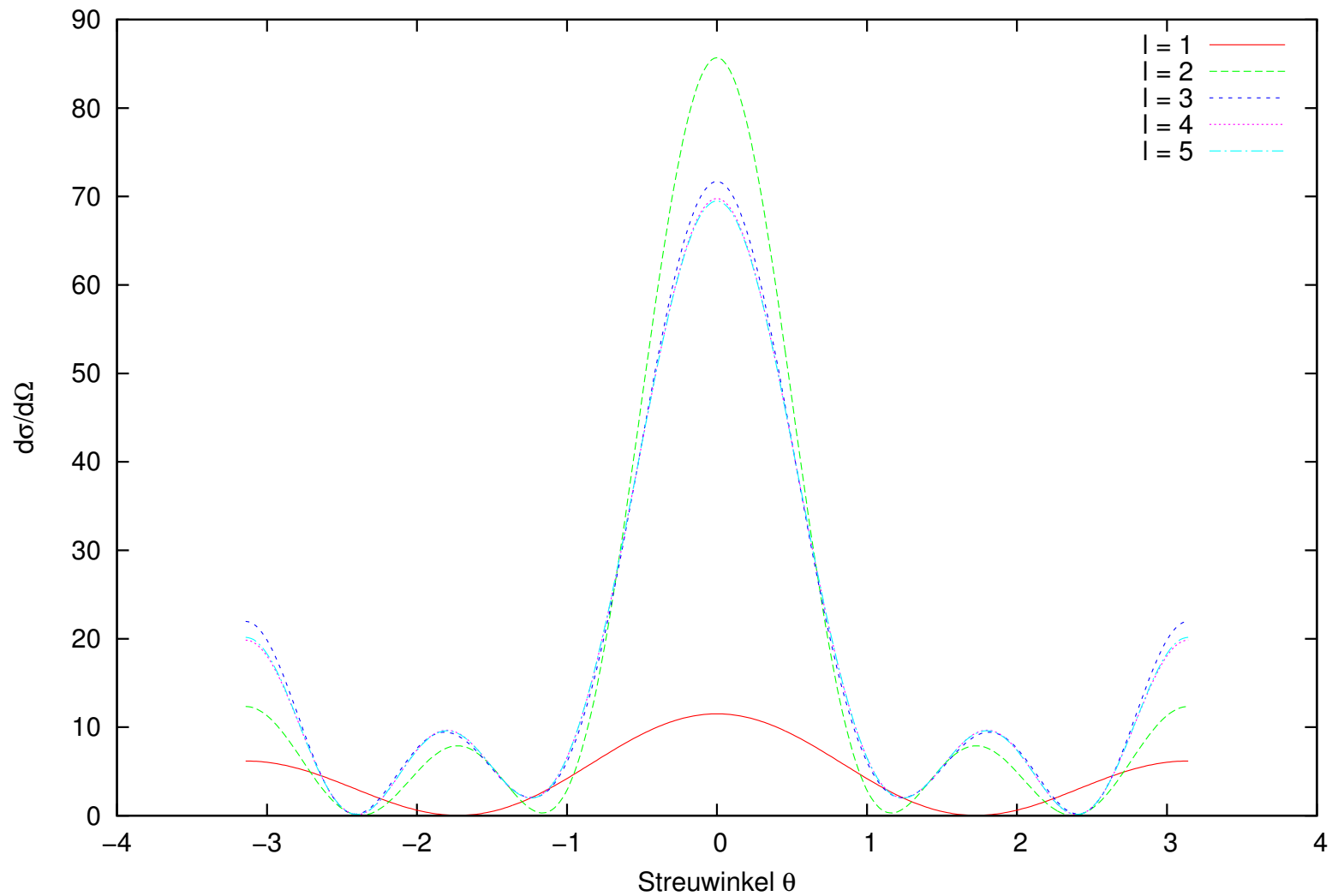
● **Abhängigkeit vom Drehimpuls**

● Abhängigkeit von der Energie

● Abhängigkeit von der Energie

Rückblick

Differentieller Wirkungsquerschnitt für  $E = 10$ , verschiedene  $l$



# Abhängigkeit von der Energie



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

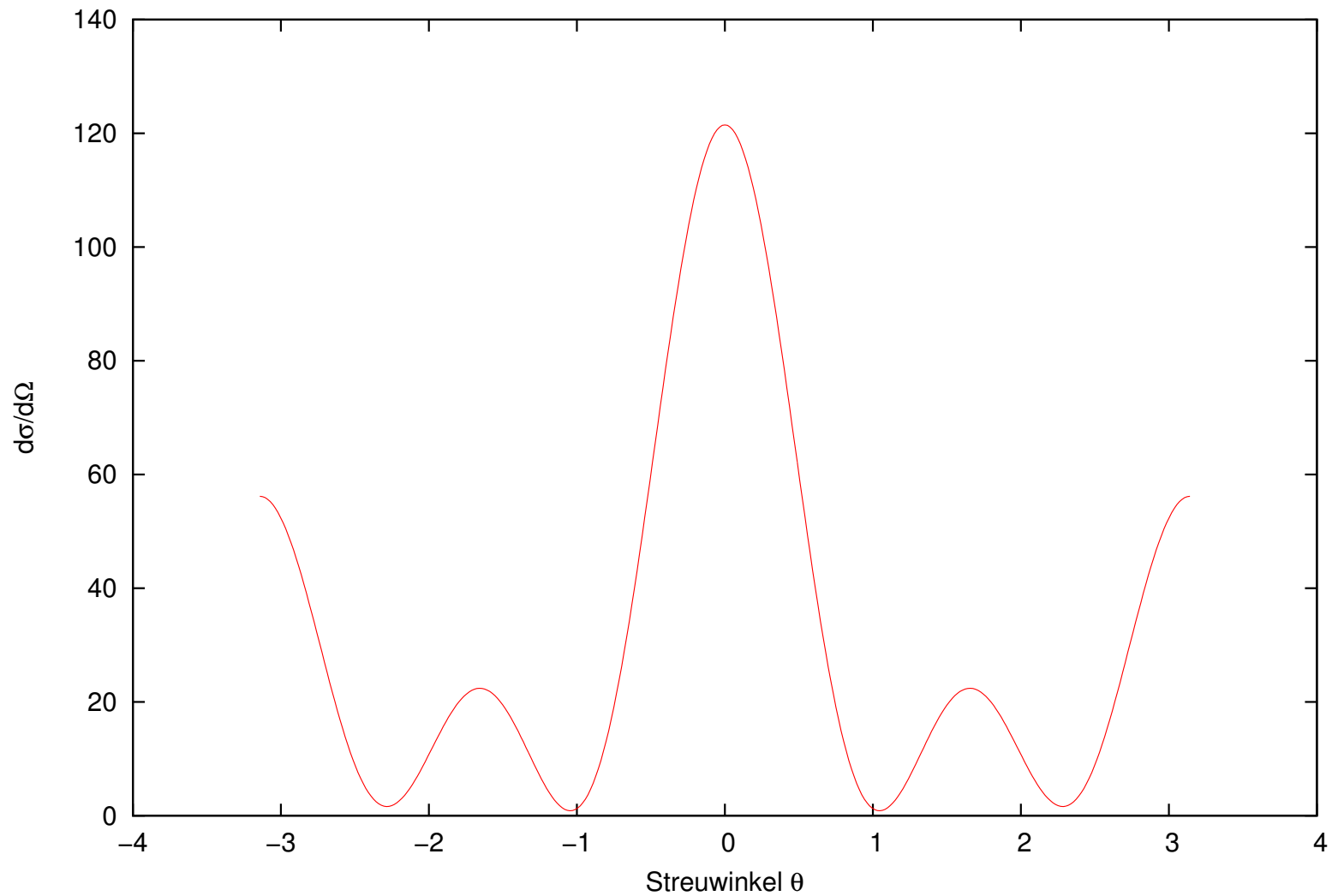
Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

- Mathematische Betrachtung
- Abhängigkeit vom Drehimpuls
- Abhängigkeit von der Energie
- Abhängigkeit von der Energie

Rückblick

Differentieller Wirkungsquerschnitt für  $E = 5$ ,  $l_{\max} = 4$



# Abhängigkeit von der Energie



Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

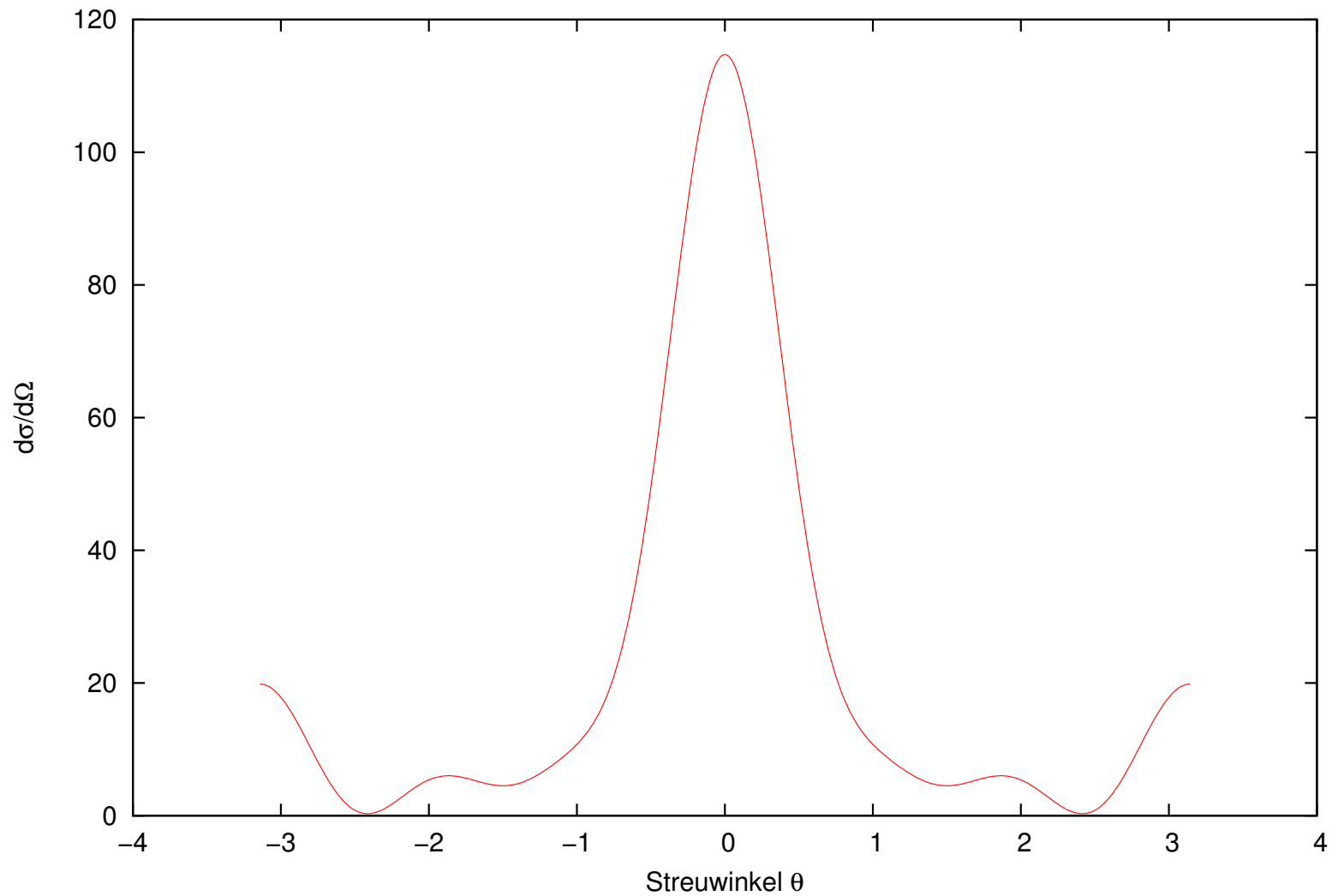
Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

- Mathematische Betrachtung
- Abhängigkeit vom Drehimpuls
- Abhängigkeit von der Energie
- Abhängigkeit von der Energie

Rückblick

Differentieller Wirkungsquerschnitt für  $E = 15$ ,  $l_{\max} = 6$





Überblick

---

Streuung und Streuphasen

---

Berechnung der Streuphasen

---

Born'sche Näherung

---

Streuquerschnitt

---

Rückblick

● Zusammenfassung

# Rückblick



# Zusammenfassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

● Zusammenfassung

- Streuung: Darstellung durch Überlagerung aus gestreuter und ungestreuter Wellenfunktion



# Zusammenfassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

● Zusammenfassung

- Streuung: Darstellung durch Überlagerung aus gestreuter und ungestreuter Wellenfunktion
- Es existiert eine Phasendifferenz  $\delta_l$  zwischen gestreuter und ungestreuter Welle



# Zusammenfassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

● Zusammenfassung

- Streuung: Darstellung durch Überlagerung aus gestreuter und ungestreuter Wellenfunktion
- Es existiert eine Phasendifferenz  $\delta_l$  zwischen gestreuter und ungestreuter Welle
- Durch Streuphase  $\delta_l$  kann messbare Größe  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  berechnet werden.

# Zusammenfassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

● Zusammenfassung

- Streuung: Darstellung durch Überlagerung aus gestreuter und ungestreuter Wellenfunktion
- Es existiert eine Phasendifferenz  $\delta_l$  zwischen gestreuter und ungestreuter Welle
- Durch Streuphase  $\delta_l$  kann messbare Größe  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  berechnet werden.
- Zwei Arten der Berechnung von  $\delta_l$ :
  - ◆ Direkte Bestimmung nach Lösung des Hamiltons
  - ◆ Bornsche Näherung

# Zusammenfassung

Überblick

Streuung und Streuphasen

Berechnung der Streuphasen

Born'sche Näherung

Streuquerschnitt

Rückblick

● Zusammenfassung

- Streuung: Darstellung durch Überlagerung aus gestreuter und ungestreuter Wellenfunktion
- Es existiert eine Phasendifferenz  $\delta_l$  zwischen gestreuter und ungestreuter Welle
- Durch Streuphase  $\delta_l$  kann messbare Größe  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  berechnet werden.
- Zwei Arten der Berechnung von  $\delta_l$ :
  - ◆ Direkte Bestimmung nach Lösung des Hamiltons
  - ◆ Bornsche Näherung

ENDE